金融经济学

Jianqi Huang

2023 年 5 月 5 日

摘要

所参考教材是徐高的《金融经济学》，是自己所学习时根据自身知识结构写下的的笔记．

1 风险偏好与投资储蓄

Note 1.1. *风险厌恶系数刻画了边际效用下降的速度．之所以风险厌恶的原因，消费不平滑所带来的损失越大，效用不平滑所带来的损失越大．*

绝对风险厌恶系数

对于一个拥有财富水平 y 的投资者提供一项投资．这项投资以 π 概率赢得货币，或以 10π 概率输掉 h 货币．对于个体决策来说，风险厌恶者一定需要更高的 π 才会选择参与这个投资，我们定义 π^* 为投资者参与和不参与之间完全无差异的临界值，π^* 就可以被视为对投资者风险厌恶的一个度量．根据上述关系构建等式关系：

$$u(y) = \pi^* u(y+h) + (1-\pi)u(y-h) \tag{1}$$

将 $u(y+h)$ 与 $u(y-h)$ 在 y 处进行泰勒展开

$$u(y+h) = u(y) + hu'(y) + \frac{h^2}{2}u''(y) + o_1(h^2) \tag{2}$$

$$u(y-h) = u(y) - hu'(y) + \frac{h^2}{2}u''(y) + o_2(h^2) \tag{3}$$

将上述等式代入 (1) 可以得到

$$u(y) = \pi^* \left[u(y) + hu'(y) + \frac{h^2}{2} u''(y) \right] + (1 - \pi^*) \left[u(y) - hu'(y) + \frac{h^2}{2} u''(y) \right]$$

整理得到

$$0 = (2\pi^* - 1) hu'(y) + \frac{h^2}{2} u''(y)$$

$$\pi^* = \frac{1}{2} + \frac{h}{4} \left[-\frac{u''(y)}{y'(y)} \right]$$

Definition 1.1 (绝对风险系数)**.** $R_A(y) \equiv -\frac{u''(y)}{u'(y)}$ *或称 arrow-pratt 绝对风险系数.*

我们进一步可以推导关于相对风险系数，我们可以假设输赢的数量是投资者的一个固定比例.

$$u(y) = \pi^* u(y + \theta y) + (1 - \pi^*) u(y - \theta y)$$

同样进行泰勒展开

$$u(y + \theta y) = u(y) + \theta y u'(y) + \frac{\theta^2}{2} y^2 u''(y) \tag{4}$$

$$u(y - \theta y) = u(y) - \theta y u'(y) + \frac{\theta^2}{2} y^2 u''(y) \tag{5}$$

同样和前面类似的步骤得到

$$\pi^* = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{4} \left[-\frac{y u''(y)}{u'(y)} \right]$$

我们定义 $R_R(y) \equiv -y \frac{u''(y)}{y'(y)}$ 为相对风险系数.

1.1 几种常见的效用函数

在风险中我们并没有考虑财富这样的一个全局的条件，进一步对该条件进行探索

CARA：绝对风险厌恶不变型

$$u(c) = -e^{\alpha c}$$

其中绝对风险厌恶系数为 $R_A(c) = \alpha$

CRRA：相对风险厌恶不变型

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma-} - 1}{1 - \gamma}$$

HARA 双曲绝对风险厌恶型

$$R_A(c) = -\frac{u''(c)}{u'(c)} = \frac{1}{ac + b}$$

线性效用函数

$$u(c) = ac$$

1.2 投资者参与风险资产的条件

假设投资者的初始财富 w_0 选择无风险资产和一种风险资产 $(\tilde{r})$ 之间分配.

在期末，投资者的财富变为

$$\tilde{w} = (1 + r_f)(w_0 - a) + a(1 + \tilde{r}) = w_0(1 + r_f) + a(\tilde{r} - r_f)$$

投资者需要通过选择 a 来最大化期末的期望效用.

$$\max_a E[u(\tilde{w})] = \max_a E\{u[w_0(1 + r_f) + a(\tilde{r} - r_f)]\}$$

其中 $u(\cdot)$ 是效用函数．因为上述问题并不涉及多期的最优化，直接可进行求解一阶条件

$$E\{u'(w_0(1 + r_f) + a^*(\tilde{r} - r_f))(\tilde{r} - r_f)\} = 0$$

其中的 a^* 是使得期望效用最大化的风险资产投资量，我们可以给出一下命题 a^* 与风险资

产超额回报之间的关系.

Proposition 1.1. 若 a^* 是优化一阶条件的解，投资者风险厌恶且其效用函数可导 $[u''(\cdot) < 0]$ 则有一下三个条件成立

- $a^* > 0$ 当且仅当 $E(\tilde{r}) > r_f$
- $a^* = 0$ 当且仅当 $E(\tilde{r}) = r_f$
- $a^* < 0$ 当且仅当 $E(\tilde{r}) < r_f$

1.3 风险与储蓄

资产价值在于其在未来会产生经济利益，购买资产就是牺牲当下的现金以换取未来的利益.购买资产本质上是一种储蓄行为.

1.3.1 确定性情况

$$\max_s u(w-s) + \delta u(sR)$$

这里并没有不确定性，一阶条件为

$$u'(w-s) = \delta R u'(sR)$$

我们所感兴趣的问题是当 R 增大时候，储蓄 s 如何变化. 将上式两侧同时对 R 求导，可以得到

$$-u''(w-s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}R} = \delta u'(sR) + \delta R u''(sR)(s + R\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}R})$$

从中可求解 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}R}$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}R} = \frac{\delta u'(sR) + \delta s R u''(sR)}{-u''(w-s) - \delta R^2 u''(sR)}$$

1.3.2 不确定状况

假设资产回报率是一个随机变量，我们关系当 R 期望不变时候，风险变得更大，消费者的储蓄会如何变化.

直觉上，若回报率的风险上升，意味着未来的储蓄回报并不如现在，因此更有可能选择现在消费．因此风险上升对于储蓄率的变化是一种替代效应．

我们可以把消费者的优化问题写为下面的形式：

$$\max_s u(w-s)+\delta E[u(sR)]$$

其一阶条件为

$$u'(w-s)=\delta E[Ru'(sR)]$$

当 R 的方差变大时候，这个一阶条件 RHS 变大，储蓄 s 会增加（LHS 是 s 的单调递增函数），若定义函数 $g(R)\triangleq Ru'(sR)$ ，要使得 R 的方差变大，$g(R)$ 必须是凸函数 $[g''(R)>0]$.

可以计算出

$$g'(R)=u'(sR)+sRu''(sR) \tag{6}$$

$$g''(R)=2su''(sR)+s^2Ru'''(sR) \tag{7}$$

引入金博尔 (Kimball) 于 1990 年首次提出的审慎 (prodence) 概念，定义绝对审慎系数 $(P_A(y))$

$$P_A(y)\triangleq -\frac{u'''(y)}{u''(y)}$$

同时定义相对审慎系数 $P_R(y)$

$$P_R(y)\triangleq -\frac{yu'''(y)}{u''(y)}$$

由此

$$g''(R)=su''(sR)\left[2+\frac{sRu'''(sR)}{u''(sR)}\right]=su''(sR)[2-P_R(sR)]$$

由于 $s>0$ ，$u''(sR)<0$ 所以只有当 $P_R(sR)>2$ 时候 $g''(R)>0$ 回报率风险的扩大将增大一期的储蓄．相反的是若小于，回报率风险的扩大会减少一期的储蓄．

2 完备市场的一般均衡

2.1 资产市场

从权益角度来说，一项资产是对未来的收益的索取权，在第 1 期（第 0 期为期初）会给资产所有者进行支付．支付数量取决于具体发生的状态．记 x_s 为资产在第 1 期的支付．

$$\boldsymbol{x}^j = \begin{bmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_S^j \end{bmatrix}$$

元素 x_s^j 表示的是资产 j 在状态 s 下的支付．

假设市场有 J 种可交易的资产，将这些资产的支付列向量排在一起，得到整个资产市场的支付矩阵

$$\boldsymbol{x} \triangleq \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^J \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_S^1 & \cdots & x_S^J \end{bmatrix}$$

同样也可以写为向量的形式

$$x = [\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^J]$$

Definition 2.1. 对于各类资产持有量组成的向量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_J)^T$ 称为是一个资产组合．资产组合也是一个资产，容易得到在各个状态下的支付为

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{J} x_1^j \theta_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{J} x_S^j \theta_j \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\theta}$$

记所有的价格为 $\boldsymbol{p} \triangleq [p_1, \cdots, p_J]$ 组合 $\boldsymbol{\theta}$ 在第 0 期的价格为 $\sum_{j=1}^{J} p_j \theta_j = \boldsymbol{p}\boldsymbol{\theta}$

Note 2.1. 在资产定价理论中，给定了支付矩阵 $\boldsymbol{x}$ 下，在确定资产价格 $\boldsymbol{p}$

Definition 2.2. *任何一个 1 期消费计划都可以认为是通过某个资产组合来实现，我们称这资产市场* $\boldsymbol{x}$ *是完备的.*

具体来说就是在任给的 1 期消费计划中 $\boldsymbol{c} = (c_1, \cdots, c_s)^T$ 我们都可以找到一个权重组合 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_J)^T$ 作为下面的方程解.

$$c_s = \sum_{j=1}^{J} x_s^j \theta_j \tag{8}$$

以矩阵的形式可以写为

$$\boldsymbol{x\theta} = \boldsymbol{c}$$

Note 2.2. *同时需要注意上述的方程并不一定有解，因为在资产数 J 可能并不如状态数 S 多. 简单可理解为资产无法在有限状态下进行准确定价. 因此一个完备市场中需要保证资产数量至少等于状态数.*

Example 2.1 (完备与非完备的资产市场)**.** *几个资产市场的支付矩阵如下所示. 矩阵的行表示状态，列表示资产（A、B）.*

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} state1 \\ state2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \end{array}$$

假设第 1 期两个状态下的消费分别为 c_1 *和* c_2 *，若完备，则根据公式 (8) 有*

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = c_1 \\ 2\theta_1 + 4\theta_2 = c_2 \end{cases}$$

容易解得

$$\begin{cases} \theta_1 & = -2c_1 + \frac{3}{2}c_2 \\ \theta_2 & = c_1 - \frac{1}{2}c_2 \end{cases}$$

因此这是一个完备市场，所以在完备市场中，状态与资产价格组合的矩阵需要是不可线性表出的.

2.2 阿罗-德布鲁市场

Definition 2.3. *完备市场可以通过资产组合实现任意的消费计划. 我们可以看出，一种非常简单的市场一定是完备的. 即资产数量与状态数量相等. 者黄总状态下，其他状态无支*

付．这种资产市场也被称为是阿罗-德布鲁市场．

阿罗-德布鲁市场的支付矩阵 (payoff matrix) 是一个单位矩阵，

$$\boldsymbol{I} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

阿罗市场的资产称为是阿罗证券．以 $\boldsymbol{I}_s$ 来表示在 s 状态下的有 1 单位支付的阿罗证券，其支付向量可写为

$$\boldsymbol{I}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{I}$ 第 s 列向量．将阿罗证券 $\boldsymbol{I}_s$ 在当前 (第 0 期) 的价格写为 φ_s ，则所有的阿罗证券价格可以合起来写为

$$\boldsymbol{\varphi} \triangleq [\varphi_1, \cdots, \varphi_S]$$

阿罗证券的价格也称为是**状态价格 (state price)**．给出了第 1 期某个状态下 1 单位支付在第 0 期的价格．

阿罗证券价格是资产定价的关键．任何一个资产都可用阿罗证券的一个组合来表示．知道了所有的阿罗证券，则就知道了所有资产的价格．

以支付向量为 $\boldsymbol{x}^j$ 的资产 j 为例，用阿罗证券构造资产 j 的组合就为 $\boldsymbol{x}^j$ ，资产价格为

$$p_j = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{x}^j = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^j$$

所有 J 种资产的价格向量为

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\varphi x} = \left[\sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^1, \cdots, \sum_{s=1}^{S} \varphi_s x_s^J \right]$$

Note 2.3. 价格与支付之间是一种线性关系，由此可以进行线性组合来表示价格 = 资产组合 * 支付?

而若我们知道了完备市场 S 种线性无关的资产价格（只需要 S 种），就可以找出所有的阿罗证券价格

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{p x^{-1}}$$

特别当无风险资产是在各个状态下支付都是为 1 的资产（确定性），支付向量为

$$bmI = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

若无风险资产在第 0 期的价格为 ρ ，则它会等于所有阿罗证券中的价格之和，用矩阵表示

$$\rho = \boldsymbol{\varphi 1} = \sum_{s=1}^{S} \varphi_s$$

从阿罗证券的支付矩阵对行求和也可以看出.

2.3 完备市场的均衡

假设消费者有 vNM 效用函数

$$u(c_0) + \delta \sum_{s=1}^{S} \pi_s u(c_s)$$

均衡求解

消费者的优化问题就是选择对所有 J 种资产的持有量 $(\theta_1, \cdots, \theta_J)$ 来最大化期望效用.

优化问题可以写为

$$\begin{array}{ll} \max_{\theta_1,\cdots,\theta_J} & u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s) \\ s.t. & c_0=e_0-\sum_{j=1}^{J}p_j\theta_j \\ & c_s=e_s+\sum_{j=1}^{J}x_s^j\theta_j, \quad s=1,\cdots,S \end{array}$$

其中的 $e_0,e_1,\cdots,e_S$ 分别为消费者在第 0 期及第 1 期 S 个状态下的消费品的禀赋，x_s^j 为第 j 种资产的支付.

Note 2.4. *其中的 $\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s)$ 是 $E(u(\tilde{c_1}))$ 进行了展开得到的这里只考虑了 0 期和 1 期，其中的 c_s 严格应写为 $c_{1,s}$. 可以假设不同的人有不同的效用函数，但需要假设 π_s 是所有人相同的，这里简便而统一了假设效用函数.*

将其转化为阿罗证券形式的优化问题

$$\begin{array}{ll} \max_{\theta_1,\cdots,\theta_J} & u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s) \\ s.t. & c_0=e_0-\sum_{s=1}^{S}\varphi_s\theta_s \\ & c_s=e_s+\theta_s, \quad s=1,\cdots,S \end{array}$$

进一步可以将第 1 期的预算约束带入到第 0 期中，消去所有的 θ_s，消费者的优化问题改写为

$$\begin{array}{ll} \max_{\theta_1,\cdots,\theta_J} & u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s) \\ s.t. & c_0+\sum_{s=1}^{S}\varphi_s(c_s-e_s)=e_0 \end{array}$$

转化为无约束优化问题，构建拉格朗日函数

$$\mathcal{L}=u(c_0)+\delta\sum_{s=1}^{S}\pi_s u(c_s)+\lambda\left[e_0-c_0-\sum_{s=1}^{S}\varphi_s(c_s-e_s)\right]$$

一阶条件为

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_0}=0: \quad u'(c_0)=\lambda \tag{9}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c_s}=0: \quad \delta\pi_s u'(c_s)=\lambda\varphi_s, \quad s=1,2,\cdots,S \tag{10}$$

根据上述条件得到

$$
\begin{aligned}
c_0 &= u'^{-1}(\lambda) \\
c_s &= u'^{-1}(\frac{\lambda\varphi_s}{\delta\pi_s})
\end{aligned}
\tag{11}
$$

带入预算约束得到

$$
u'^{-1}(\lambda) + \sum_{s=1}^{S} \varphi_s \left[u'^{-1}(\frac{\lambda\varphi_s}{\delta\pi_s}) - e_s \right] = e_0
$$

可求解出 λ ，进一步就可求解出消费者的证券选择.

一阶条件意味着

$$
\frac{\delta\pi_s u'(c_s)}{u'(c_0)} = \varphi_s \tag{12}
$$

$$
\frac{\pi_s u'(c_s)}{\pi_{s'} u'(c_{s'})} = \frac{\varphi_s}{\varphi_{s'}} \tag{13}
$$

从 (13) 看出阿罗证券价格于对应状态发生的概率，以及消费者在这一状态下的边际效用成正比.

2.4 均衡算例

2.5 完备市场中的一般均衡的性质

假设存在一个中央计划者，拥有所有信息，若这个中央计划者能有无限的信息获取和资源配置权. 并且关心所有人的福利. 则这个中央计划者所做出的资源配置是最优的.

$$
\begin{array}{ll}
\max_{\{c_{k_0}, c_{k_1}, \cdots, c_{k_S}\}_{k=1}^{K}} & \sum_{k=1} \mu_k \left[u(c_{k_0}) + \delta_k \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_k(c_{k_s}) \right] \\
s.t. & \sum_{k=1}^{K} c_{k_0} = \sum_{k=1}^{K} e_{k_0} \\
& \sum_{k=1}^{K} c_{k_s} = \sum_{k=1}^{K} e_{k_s}, \quad s = 1, 2, \cdots, S
\end{array}
$$

其中的 c_{k_s} 为第 k 位消费者在 s 种状态下的消费. e_{k_s} 为第 k 位消费者在第 s 种状态下的消费品禀赋; $0 \le \mu_k$ 表示的第 k 的权重（重要程度）对于中央计划者. 中央计划者只面临物理约束.

Note 2.5. 中央计划者的约束仅仅是种消费不能超过总禀赋, 其中没有价格. 中央计划者在

宽泛约束下所选择的资源分配就代表了任何资源配置机制所可能达到的福利状况的上限.

同样是构建拉格朗日函数.

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{K} \mu_k \left[u_k(c_{k_0} + \delta_k \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_k(c_{k_s})) \right] + \eta_0 \left(\sum_{k=1}^{K} e_{k_0} - \sum_{k=1}^{K} c_{k_0} \right)$$

一阶条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{k_0}} = 0: \quad & \mu_k u_k'(c_{k_0}) = \eta_0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{k_s}} = 0: \quad & \mu_k \delta_k \pi_s u_k'(c_{k_s}) = \eta_s \end{aligned}$$

求解可以得到

$$\begin{aligned} c_{k_0} &= u_k'^{-1}\left(\frac{\eta_0}{\mu_k}\right) \\ c_{k_s} &= u_k'^{-1}\left(\frac{\eta_0}{\mu_k \delta_k \pi_s}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

该方程刻画的是在帕累托最优下的消费特性，而之前所求解的一般均衡 (11) 是在完备市场中的消费特性．同时令 $\lambda_k = \frac{\eta_0}{\mu_k}, \varphi_s = \frac{\eta_s}{\eta_0}$ 则中央计划者的配置和财富分布的均衡配置完全相同．λ_k 是影子价格（放松约束所带来目标函数的提升），因此含义为 k 消费者财富影子价格，决定了 k 的财富．φ_s 为 arrow 证券价格．**因此可以在帕累托最优配置，调配初始财富，达到一般均衡．**可以用第二福利经济学定理来表示．

Theorem 2.1 (福利经济学第二定理)**.** *在完备市场中，任给一个帕累托最优配置都可以由对应某种财富初始分配的市场均衡达到.*

Theorem 2.2 (福利经济学第一定理)**.** *完备市场中，任何一个由市场均衡形成的资源分配都是帕累托最优的.*

2.5.1 最优风险分担特点

先给出定理:

Theorem 2.3. *完备时候，消费者的不同状态的消费波动只与各个状态中的总禀赋有关，与消费者自己的禀赋在各个状态的波动无关.*

再对定理进行相应的证明:

上面已经证明了关于帕累托最优与均衡之间的等价性．我们可以认为完备市场的均衡实现了最优的风险分担．

利用 (14) 可加总经济中的总消费．

$$c_s=\sum_{k=1}^{K}c_{k_s}=\sum_{k=1}^{K}u_k'^{-1}\left(\frac{\eta_s}{\mu_k\delta_k\pi_s}\right)$$

根据上述等式我们可以给出关于 η 的函数 $\eta_s=g(c_s)=g(e_s)$ ，因此

$$c_{k_s}\left[\frac{g(e_s)}{\mu_k\delta_s\pi_s}\right] \tag{15}$$

通过方程 (15) 可看出任意一个消费者对任意一个状态下的消费，只取决于总禀赋．

μ_k 是一个关于消费者财富的函数，

$$\mu_k\underbrace{\left(e_{k_0}+\sum_{s=1}^{S}\varphi_s e_{k_s}\right)}_{\lambda_k} \tag{16}$$

可看出，μ_k 仅取决于消费者的 e_s 总禀赋和消费者自己的财富有关．

Example 2.2. *有 A 和 B 两个人，A 在 0 期的禀赋多于 B，而在 1 期的禀赋少于 B，但两期的总禀赋相同 $e_k^0=e_k^1$ ，对于总禀赋来说并没有变化，消费者的消费也并不会改变，由此 A 和 B 两人的消费是一样的．*

这里就和之前学到的 CAPM 模型类似，CAPM 只会补偿系统性风险，而同样消费者消费的波动只与外界总禀赋波动有关 $\{e_0,e_1,\cdots,e_s\}$

Theorem 2.4. *对于任意两个状态 s 与 s' 假设有 $c_s>c_{s'}$ 对于任意消费者 k 必有 $c_{k_s}>c_{k_{s'}}$*

Theorem 2.5. *每位消费者所承担的边际总体风险等于他绝对风险容忍度*

2.6 C-CAPM

2.6.1 代表性消费者

从 C-CAPM 中可看出，是一个资产定价与消费所联系的理论．其核心在于，资产不过是不同时间和不同状态下调整资源配置的工具．

$$\max_{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_J} \quad u(e_0 - \sum_{j=1}^{J} p_j\theta_j) + \delta \sum_{s=1}^{S} \pi_s u(e_s + \sum_{j=1}^{J} x_s^j \theta_j)$$

对 θ_j 的一阶条件

$$p_j u'(c_0) = \delta \sum_{s=1}^{S} \pi_s u'(c_s) x_s^j$$

同时除以 $p_j u'(c_0)$ 同时注意到 x_s^j/p_j 等于资产 j 在 s 状态下的回报率 +1 (1+r)

$$1 = \delta \sum_{s=1}^{S} \pi_s \frac{u'(c_s)}{u'(c_0)}(1 + r_s^j)$$

改写为期望形式

$$1 = E\left[\delta \frac{u'(c_s)}{u'(c_0)}(1 + r_s^j)\right]$$

资产定价方程是消费者的一阶条件，决定于消费者的消费的波动和不同状态的边际效用比．

2.6.2 均衡的资产价格

2.6.3 SDF

在前面我们推导了资产定价方程

$$p_j = E\left[\delta \frac{u'(\tilde{c_1})}{u'(c_0)}\right] \tag{17}$$

其中的 $\tilde{x_j}$ 是资产 j 未来支付． p_j 是现在的价格．该方程是在消费者最优条件下均衡所满

足的必要条件．若定义

$$\tilde{m} \triangleq \frac{\delta u'(\tilde{c_1})}{u'(c_0)},$$

则上式就可以写为

$$p_j = E(\tilde{m}\tilde{x})$$

其中的 $\tilde{m}$ 就称为是随机折现因子．

随机折现因子决定了跨期的边际效用比．反映消费者不同的时间和状态下的消费主观看法．

2.6.4 无风险利率的确定

无风险利率代表了资金的时间价格．

$$1 = E[\tilde{m}(1+r_f)] \Rightarrow r_f = \frac{1}{E(\tilde{m})} - 1 \tag{18}$$

其中的 $\tilde{m}$ 是 SDF，定义消费增长率为

$$\tilde{g} \triangleq \tilde{c_1}/c_0 - 1$$

SDF 可以用二阶泰勒展开得到

$$\begin{aligned}
\tilde{m} &= \delta\frac{u'[c_0(1+\tilde{g})]}{u'(c_0)} \\
&\approx \frac{\delta}{u'(c_0)}\left[u'(c_0) + u''(c_0)c_0\tilde{g} + \frac{1}{2}u'''(c_0)c_0^2\tilde{g}^2\right] \\
&= \delta\left\{1 - \left[-\frac{c_0u''(c_0)}{u'(c_0)}\right]\tilde{g} + \frac{1}{2}\left[-\frac{c_0u''(c_0)}{u'(c_0)}\right]\left[-\frac{c_0u'''(c_0)}{u''(c_0)}\right]\tilde{g}^2\right\} \\
&= \delta\left(1 - R_R\tilde{g} + \frac{1}{2}R_RP_R\tilde{g}^2\right)
\end{aligned}$$

定义 $\bar{g} \triangleq E(\tilde{g})$ 为消费增长率的期望值．而消费增长率的方差

$$var(\tilde{g}) = E(\tilde{g}-\bar{g})^2 = E(\tilde{g}^2) - 2\bar{g}E(\tilde{g}) + \bar{g}^2 = E(\tilde{g}^2) - \bar{g}^2$$

在 $\bar{g}$ 较小时候，$\bar{g}^2$ 会接近于 0，因此

$$E(\tilde{g}^2) = var(\tilde{g}) + \bar{g}^2 \approx var(\tilde{g})$$

再带入可得

$$E(\tilde{m}) \approx \delta \left(1 - R_R\bar{g} + \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2\right)$$

由此我们可以用上式带入 (18) 中得到

$$\begin{aligned} r_f &= \frac{1}{E(\tilde{m})} - 1 = \frac{1}{\delta\left(1 - R_R\bar{g} + \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2\right)} - 1 \\ &= \frac{1 - \delta + \delta R_R\bar{g} - \frac{1}{2}\delta R_R P_R \sigma_g^2}{\delta\left(1 - R_R\bar{g} + \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2\right)} \\ &\approx \frac{1-\delta}{\delta} + R_R\bar{g} - \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2 \end{aligned}$$

上述的近似估计中 $\bar{g}, \sigma_g^2$ 都是小数，因此分母估计为 δ 若再对于消费者的主观贴现进行定义 $\rho \triangleq \frac{1}{\delta} - 1$ 可以得到

$$r_f = \rho + R_R\bar{g} - \frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2$$

Note 2.6. 这里的变量都是真实变量而非名义变量

- 消费者的不耐心程度
- 经济增长水平，这里用相对风险厌恶系数和消费增长率期望值 g 的乘积来刻画
- 预防性储蓄动机，这里由公式 $\frac{1}{2}R_R P_R \sigma_g^2$ 来刻画

2.6.5 风险溢价的决定

3 动态定价理论

3.1 最优停时

给到期日不确定的资产定价，可以归结为数学上的**最优停时问题**最优停时需要选择一个最优的结束时间来结束一个随机过程. 美式期权的持有者需要决定什么时候来结束这个期权，从而让自身效益最大化.

美式买入期权永远不会被提前行权. 从期权买卖的评价关系中看出这一点.

在欧式期权中，若欧式买入期权的价格是 C ，欧式卖出期权的价格是 P 那么就存在以下的平价关系.

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

3.1.1 最优停时的计算

假设这样一个赌局，盒子中有 20 个红球和 20 个绿球，参与赌局的人可以每次从这个盒子中摸出 1 个球. 红球则得 1 元，绿球则输 1 元. 参与人在摸球中可以选择随时停止赌局. 显然这个赌局对参与人的最差支付为 0，因为参与人选择一直参与，但也可获得正的期望，一直赢红球后直接退出. 由此会带来正的收益，这个就和期权类似. 需要去计算出这个期权的价值，可以定义这样一个值函数 $V(R, G)$ 为盒子中还有 R 个红球，G 个绿球所能够带来的**期望支付**.

初始条件为:

$$V(1,0) = 1, \quad V(0,1) = 0$$

而我们想要求解的是 $V(20, 20)$

我们可以找出不同的递推关系，先对一些特殊情况进行考虑，只有红球或绿球:

$$\begin{aligned} V(R,0) &= 1 + V(R-1,0) \\ V(0,G) &= 0 \end{aligned}$$

更为一般的情况，有 R 个红，G 个绿，会以 $\frac{R}{R+G}$ 的概率摸到红球，获得 1 元的收益，而

在未来的赌局中获得 $V(R-1,G)$ 的期望支付．同样 $\frac{G}{R+G}$ 摸到绿球，损失 1 元．再摸一球的期望支付为

$$\frac{R}{G+R}\left[1+V(R-1,G)\right]+\frac{G}{G+R}\left[-1+V(R,G-1)\right]$$

同时还有退出的权利，因此可以在 0 与期望间取最大值

$$V(R,G)=\max\left\{0,\frac{R}{G+R}\left[1+V(R-1,G)\right]+\frac{G}{G+R}\left[-1+V(R,G-1)\right]\right\} \tag{19}$$

上述的方程也称为是 Bellman 方程．

3.2 连续时间定价公式

3.2.1 鞅方法

$$\mathrm{d}(\ln B_t)=\frac{1}{B_t}\mathrm{d}B_t=\frac{1}{B_t}rB_t\mathrm{d}t=r\mathrm{d}t$$

两侧同时进行积分

$$\begin{aligned}\int_{t=1}^{T}\mathrm{d}(\ln B_t)&=\int_{t=1}^{T}r\mathrm{d}t\\ \ln B_T-\ln B_0&=rT\\ B_T&=B_0e^{rT}\end{aligned}$$

无风险债券在 T 时刻的价格公式．接下来对于股票价格公式进行求解，使用 Ito Lemma，可以推导出

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}Z_t$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\ln S_t) &= \frac{1}{S_t}\mathrm{d}S_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\mathrm{d}S_t^2 \\
&= \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}Z_t - \frac{1}{2S_t^2}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}Z_t) \\
&= \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}Z_t - \frac{1}{2}\sigma^2\mathrm{d}t \\
&= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}Z_t
\end{aligned}
$$

由此对于股票对数价格的运动方程不再是原先的几何布朗运动.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\ln S_t) &= \int_{t=0}^{T}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\int_{t=0}^{T}\mathrm{d}Z_t \\
\ln S_T - \ln S_0 &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\int_{t=0}^{T}\mathrm{d}Z_t \\
S_T &= S_0\exp\left[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\int_{t=0}^{T}\mathrm{d}Z_t\right]
\end{aligned}
$$

进一步化简得到

$$
E(S_T) = S_0e^{\mu T} \tag{20}
$$

显然这里的股票价格并不符合鞅性. 即 $E(S_T) \neq S_0e^{rT}$ 贴现后的股票价格. . 从无套利推导出唯一一个（完备市场）等价鞅测度.

$$
\hat{E}[S_T] = S_0e^{rT}
$$

等价鞅测度

$$
S_T = S_0\exp\left[(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\int_{t=0}^{T}\mathrm{d}\hat{Z}_t\right] \tag{21}
$$

在等价鞅测度下的期权在 0 时刻的价格应该为

$$
C_0 = e^{-rT}\{\max\{S_T - K, 0\}\}
$$

接下来再将等价鞅测度下的期望求解，

$$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T\right]$$

为简化书写，将 $\ln S_T$ 写为

$$\ln S_T = a + bu$$

其中的 u 是服从标准正态分布，而 a, b 参数分别为

$$\begin{aligned} a &= \ln S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T \\ b &= \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

令 $e^{a+bU} = K$ 可推导得到

$$U = \frac{\ln K - a}{b} = \frac{\ln K - \ln S_0 - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

计算期望

$$\begin{aligned} &\tilde{E}\left\{\max\{S_T - K, 0\}\right\} \\ &= \int_U^{+\infty} (e^{a+bu} - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u \\ &= e^{rT} S_0 N(b - U) - KN(-U) \end{aligned}$$

其中的 $N(U)$ 为标准正态分布的累积分布函数．在这个期望之后有

$$C_0 = e^{-rT}\tilde{E}\left\{\max\{S_T - K, 0\}\right\} = S_0 N(b - U) - e^{-rT} KN(-U)$$