均值-方差模型

黄建祺

2022-11-05

目录

1 均值方差分析方法起源

1952 年马科维茨 (H.M Markowitz) 在"Journal Finance" 发表"Portfolio selection"，被认为是现代金融学的开端。其主要讲述的是关于资产选择，对于单一资产还是资产组合——需要找到的是选择的标准，在其看来有两种标准：一个是期望收益率，另一个是方差。

2 事前回报率与事后回报率

按照计算时点的前后，回报率可以分为**事前回报率**和**事后回报率**，其最大的差异在于是否存在不确定性：事前是无法得知不确定性只能预期，而事后，回报已经产生，因此计算时候没有不确定性。

风险溢价 表示是对风险资产的所承担的风险的补偿。风险的本质是关于未来的不确定性。

在均值方差分析中，我们将过去的事后回报率代表均值回报率。事后的回报率方差来代表未来的方差。而我们所关心的是事前的回报率，以及期望回报率在其中的风险溢价。

3 资产组合

资产组合就是将多个资产组成一个集合。组合的回报和风险特性会受到组合的各个资产的回报和风险特性的影响。假定一个组合将财富进行分配在 n 种资产之上，记为一个 n 元组 $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$。任意一个元素是在 i 上的投资。

$$\sum_i w_i = 1$$

3.1 无风险资产与风险资产

在一定程度上，我们认为风险资产与无风险资产是不相关的，因其来自于一个更强的假定：无风险资产是长期保持不变的。无风险的财富份额分配为 $1-w$ 和 w。因此最终的无风险资产的均值和方差表示为:

$$\bar{r_p} = E[(1-w)r_f + wr_s] = (1-w)r_f + w\bar{r_s} = r_f + w(\bar{r_s} - r_f)$$
$$\sigma_p^2 = E[(1-w)r_f + wr_s - (1-w)r_f - w\bar{r_s}]^2 = E[w^2(r_s - \bar{r_s})^2] = w^2\sigma_s^2$$

随着 w 从 0 到 1 进行变化，可画出一条线段。将其放入坐标轴 $Er-\sigma$ 中，可以发现

$$\bar{r_p} = r_f + \frac{\bar{r_s} - r_f}{\sigma_s}\sigma_p$$

3.2 两种风险资产组合

假定回报率分别为 r_1 和 r_2，均值为 $\bar{r_1}$ 和 $\bar{r_2}$，回报率的标准差为 σ_1 和 σ_2 协方差为 σ_{12}。投资的份额分别为 w 和 $1-w$，期望回报率为

$$\bar{r_p} = E(r) = w\bar{r_1} + (1-w)\bar{r_2}$$

组合的回报率方差为

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= E[wr_1 + (1-w)r_2 - w\bar{r}_1 - (1-w)\bar{r}_2]^2 \\
&= E[w(r_1 - \bar{r}_1) + (1-w)(r_2 - \bar{r}_2)]^2 \\
&= w^2\sigma^2 + (1-w)^2\sigma^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}
\end{aligned}$$

最小方差组合：随着 w 的变化，也会发现其形成的是一条双曲线。曲线的最左侧是所能达到的最小的波动率。通过求导（一阶条件导数为 0）可得:

$$\begin{aligned}
&\partial\sigma_p^2/\partial w = 0 \\
&\Rightarrow 2\sigma_1^2 w^* - 2\sigma_2^2(1-w^*) + 2\sigma_{12} - 4\sigma_{12}w^* = 0 \\
&\Rightarrow \sigma_1^2 w^* - \sigma_2^2 + \sigma_2^2 w^* + \sigma_{12} - 2\sigma_{12}w^* = 0 \\
&\Rightarrow (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12})w^* = \sigma_2^2 - \sigma_{12} \\
&\Rightarrow w^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}
\end{aligned}$$

将此权重带回组合期望回报率的公式中，得到最小方差的均值为：

$$\begin{aligned}
&\bar{r}_p^* = w^*\bar{r}_1 + (1-w^*)\bar{r}_2 \\
&= \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}\bar{r}_1 + (1 - \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}})\bar{r}_2 \\
&= \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}\bar{r}_1 + \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}\bar{r}_2 \\
&= \frac{\sigma_1^2\bar{r}_2 + \sigma_2^2\bar{r}_1 - \sigma_{12}\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}
\end{aligned}$$

3.3 有效前沿

在均值-方差坐标系中，多种风险资产的组合区域的边界总是开口向右、上下对称的双曲线。作为一个理性投资者，只会选择上沿作为自己的投资组合的有效边界。

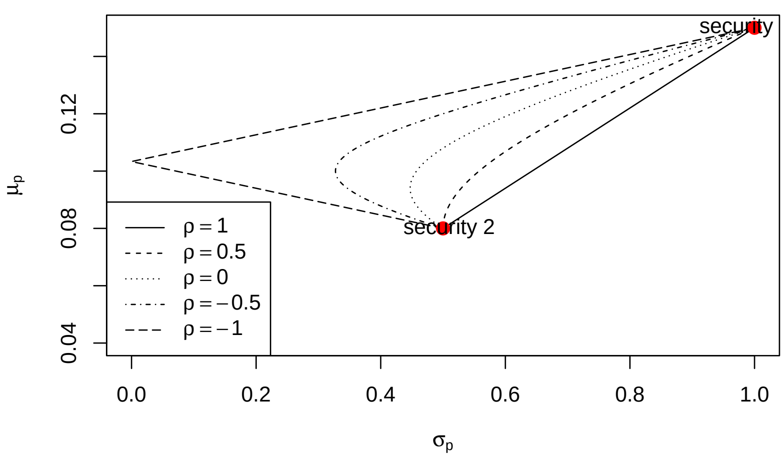

图 1: Invest Portfolio Line

3.4 共同基金定理

之前所推导的是在两种风险资产的组合，若我们将无风险资产考虑在内，我们会得到另一个组合，首先我们所认定的前提为无风险资产与所有的风险资产都是不相关的，因此在风险资产组合 p 可与与 f 进行线性组合，最后，有效前沿从曲线变为射线称为资本市场线 (capital market line,CML)。其公式为

$$\bar{r} - r_f = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}\sigma$$

理性投资者只会选择在 CML 上进行投资。这里试图去证明为何 CML 为一条直线 (射线)：在新资产组合之中包含无风险资产，标准差为零，故对于新组合资产风险（标准差）为风险资产标准差乘风险资产占比，数学表达为 $w_M = \sigma_{new}/\sigma_M$，新资产的期望报酬为加权后的期望报酬

$$E(new) = w_M \cdot E_M + w_f \cdot r_f$$

其中 $w_M + w_f = 1$，因此整理可得：

$$E(new) = \frac{\sigma_{new}}{\sigma_M} E_M + (1 - \frac{\sigma_{new}}{\sigma_M}) r_f = \frac{\sigma_{new}}{\sigma_M}(E_M - r_f) + r_f$$

因此通过这个公式可得到新资产的期望 $E(new)$ 与风险 σ_{new} 之间是构成线性关系。其中 $\frac{E_m - r_f}{\sigma_M}$ 为斜率，r_f 为截距。

我们先根据市场的风险资产进行组合，构建出市场组合。在这里可以完全不考虑客户偏好，下一步再根据客户的偏好在无风险资产与风险资产之间进行配置。- 任何有效前沿上的组合都可以由两处的有效前沿的组合得到。- 人们对于投资组合来说，无论风险偏好如何，最终都应持有相同的风险组合，风险偏好只决定购买风险资产的比重。也就是对于基金来说可以是一个高度标准化的产业，在另一角度来看，可以有效的降低市场交易成本。

3.5 马科维茨选择理论

投资组合方差：

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1} \sum_{j=1} w_i w_j Cov(r_i, r_j)$$

资产组合的平均方差：

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

协方差

$$\overline{Cov} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \sum_{i=1}^{n} Cov(r_i, r_j)$$

分散之后的空间内的方差，通过代入

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \bar{\sigma_{ii}}^2 + \frac{n-1}{n} \overline{Cov}$$

通过该公式可以看出，当 $n \to \infty$ 等式右边的第一部分（风险特有）趋于 0。

4 编程实现

假设有两种风险资产，其年均报酬如图所示。风险资产 1 和 2 收益率相关系数为 0.04，无风险报酬为 0.04，假设投资者的效用函数可以用均值-方差模型刻画，风险厌恶系数为 2.2。绘制风险资产的可行集、最优风险资产组合、资本配置线、投资者无差异曲线和给定偏好下的最优投资组合。

表 1: 风险资产期望收益-风险

资产	期望收益	标准差
风险资产 1	0.15	1.0
风险资产 2	0.08	0.5

```
## initiate
rm(list = ls())
r.f = 0.04
mu.A = 0.15
sig.A = 1
sig2.A = sig.A^2
mu.B = 0.08
sig.B = 0.5
sig2.B = sig.B^2
rho.AB = 0.04
sig.AB = rho.AB * sig.A * sig.B
risk_coef <- 2.2
data.tbl = data.frame(t(c(mu.A, mu.B, sig2.A, sig2.B, sig.A, sig.B, sig.AB, rho.AB)))
col.names = c("$\\mu_{A}$", "$\\mu_{B}$", "$\\sigma^{2}_{A}$", "$\\sigma^{2}_{B}$",
    "$\\sigma_{A}$", "$\\sigma_{B}$", "$\\sigma_{AB}$", "$\\rho_{AB}$")
knitr::kable(data.tbl, col.names = col.names, caption = "the data for two asset portfolio")
```

表 2: the data for two asset portfolio

μ_A	μ_B	σ^2_A	σ^2_B	σ_A	σ_B	σ_{AB}	ρ_{AB}
0.15	0.08	1	0.25	1	0.5	0.02	0.04

```
## construct the portfolio
x.A = seq(from = -0.4, to = 1.4, by = 0.1)
x.B = 1 - x.A
mu.p = x.A * mu.A + x.B * mu.B
sig2.p = x.A^2 * sig2.A + x.B^2 * sig2.B + 2 * x.A * x.B * sig.AB
sig.p = sqrt(sig2.p)
```

```
port.names = paste("portfolio", 1:length(x.A), sep = " ")
data.tbl = as.data.frame(cbind(x.A, x.B, mu.p, sig.p))
rownames(data.tbl) = port.names
col.names = c("$x_{A}$", "$x_{B}$", "$\\mu_{p}$", "$\\sigma_{p}$")
knitr::kable(data.tbl, col.names = col.names, caption = "The points of portfolio of two assets")
```

表 3: The points of portfolio of two assets

	x_A	x_B	μ_p	σ_p
portfolio 1	-0.4	1.4	0.052	0.7922121
portfolio 2	-0.3	1.3	0.059	0.7049113
portfolio 3	-0.2	1.2	0.066	0.6248200
portfolio 4	-0.1	1.1	0.073	0.5550676
portfolio 5	0.0	1.0	0.080	0.5000000
portfolio 6	0.1	0.9	0.087	0.4648656
portfolio 7	0.2	0.8	0.094	0.4543127
portfolio 8	0.3	0.7	0.101	0.4700000
portfolio 9	0.4	0.6	0.108	0.5095096
portfolio 10	0.5	0.5	0.115	0.5678908
portfolio 11	0.6	0.4	0.122	0.6400000
portfolio 12	0.7	0.3	0.129	0.7217340
portfolio 13	0.8	0.2	0.136	0.8101852
portfolio 14	0.9	0.1	0.143	0.9033825
portfolio 15	1.0	0.0	0.150	1.0000000
portfolio 16	1.1	-0.1	0.157	1.0991360
portfolio 17	1.2	-0.2	0.164	1.2001667
portfolio 18	1.3	-0.3	0.171	1.3026511
portfolio 19	1.4	-0.4	0.178	1.4062717

```
## calculate the max Shape ratio
sr <- (mu.p - r.f)/sig.p
maxsr = sr[which(sr == max(sr))]
## plot
slope.A = (mu.A - r.f)/sig.A
slope.B = (mu.B - r.f)/sig.B
cex.val = 1.5
plot(sig.p, mu.p, type = "b", pch = 16, cex = cex.val, ylim = c(0, max(mu.p)), xlim = c(0,
    max(sig.p)), xlab = expression(sigma[p]), ylab = expression(mu[p]), cex.lab = 1.6,
    col = c(rep("blue", 4), rep("black", 2), "green", rep("black", 8), rep("blue",
        4)))
abline(a = 0.04, b = maxsr, col = "#FF0000FF")
```

```
abline(a = 0.04, b = slope.A, col = "#FF9900FF")
abline(a = 0.04, b = slope.B, col = "#00FFFFFF")
points(0, 0.04, pch = 20, cex = 2, col = "red")
text(sig.A + 0.07, mu.A - 0.01, "security 1")
text(0.63, mu.B, "security 2")
text(0.1, r.f, "free risk")
text(0.59, 0.095, "Global min")

x.solve <- maxsr/risk_coef
y.solve <- maxsr * x.solve + r.f
c <- y.solve - 1.1 * x.solve^2
colnam <- c("x.solve", "y.solve", "c")
val <- c(x.solve, y.solve, c)
df2 <- cbind(colnam, val)
knitr::kable(df2, caption = "The axis (x,y) and the constant")
```

表 4: The axis (x,y) and the constant

colnam	val
x.solve	0.0606643973801846
y.solve	0.0480963720409021
c	0.044048186020451

```
f <- function(x) {
    1.1 * x^2 + c
}
f
```

```
function(x) {
    1.1 * x^2 + c
}
```

```
x = seq(0, 0.8, length = 100)
y = rep(0, length(x))
j = 1
for (i in x) {
    y[j] = f(i)
    j = j + 1
}
lines(x, y, type = "l")
lines(x, y + 0.01, type = "l")
lines(x, y + 0.05, type = "l")
```

```
text(0.3, 0.13, "The utility function")
```

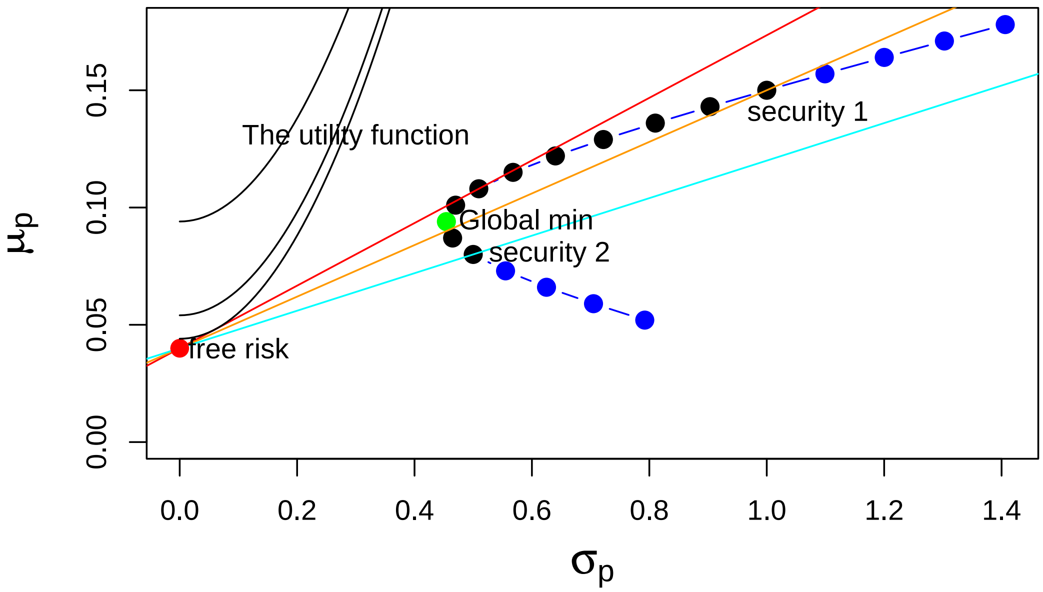

图 2: The mean variance plot

我们通过上述的计算和拟合图像可得到在给定的风险系数下，投资者会选择的投资组合整体标准差为 0.0607，均值为 0.0481，假设在这个最优组合下的占比为 `w`，无风险资产占比 `(1-w)`，由此可通过均值列等式

$$w \cdot r_p + (1 - w)r_f = E(r_c)$$

解得 $w = 0.1191$ 在另一个方面：因为是线性组合，通过坐标轴的正比例关系也可很快地计算得出 $\frac{w}{1} = \frac{0.0607}{0.5095} = 0.1191$ 其中 **0.5095** 为最优市场组合的标准差。

5 总结

根据上述的一系列从论证到实践，对于均值-方差分析的基础理论有了一定的了解，对于之后的 CAPM、cCAPM、APT 等模型的建立打下了基础。

参考文献

Allaire, JJ, Yihui Xie, Jonathan McPherson, Javier Luraschi, Kevin Ushey, Aron Atkins, Hadley Wickham, Joe Cheng, Winston Chang, and Richard Iannone. 2022. "Rmarkdown: Dynamic Documents for r." https://github.com/rstudio/rmarkdown.

Anderson, Siwan. 2003. "Why Dowries Payments Declined with Modernization in Europe but Are Rising in India." *Journal of Political Economy* 111 (3): 269310.

Zivot, Eric. n.d. *15.1 Statistical Analysis of Portfolios: Two Assets | Introduction to Computational Finance and Financial Econometrics with R*. Accessed November 9, 2022. https://bookdown.org/compfinezbook/introcompfinr/statistical-analysis-of-portfolios-two-assets.html#eq:StatisticalCERmodel.

李东风. n.d. *21 Quarto 格式文件 | R 语言教程*. Accessed November 9, 2022. https://www.math.pku.edu.cn/teachers/lidf/docs/Rbook/html/_Rbook/quarto.html.