Stochastic Calclus Lecture Note

Jianqi Huang

September 2022

1 概率论的基本概念

Definition 1.1. *将事件 (event) 定义为样本点上的某个集合，称某事件发生当且仅当它所包含的某个样本点出现.*

1.1 随机变量

- 样本点：将随机试验每一个可能的结果称为样本点 (sample point)
- 样本空间 Ω - 所表示的是所有可能的结果的集合
- 基本事件 ω - 一次试验的不可再分的结果.（元素）
- 事件 A - 由若干个 ω 组合而成的.

之间的关系表示：

$$\omega \in \Omega$$
$$\omega \notin A$$
$$A \cup \Omega$$

随机变量的本质是定义在样本空间中的可测函数，随机事件是样本空间的可测子集. 因此对于一个基本事件来说，**随机变量 X** 是定义于 Ω 的实值函数. X 是一个映射 $\Omega \to R$ 同时一个基本事件映射到 X 上：$\omega \to X(\omega)$

Note 1.1. *函数 f，才是真正的一个函数；函数值 f(x) 表示 f 在 x 处的取值.*
而往往描述一个随机变量 X，不会以 $X(\omega), \omega \in \Omega$，但已经隐含在其中了.

σ 代数：属于 Ω 的子集所构成的子集族，满足：

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ $\mathcal{F}$ 就是子集族.
2. 若 $A \in \mathcal{F}$，则 $A^c \in \mathcal{F}$ （对补集封闭）

3. 若 $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ 则 $\cup A_n \in \mathcal{F}$ （对可列并封闭）

Example 1.1. $\Omega \in \{1,2,3\}$ $A = \{1\}$
$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ 是一个 σ 代数.（平凡的 *sigma* 代数）$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \varnothing, A, A^C\}$ 同样也是一个 σ 代数.

σ 代数所表示的就是一个所有包含的信息，$\mathcal{F}$ 的信息是最小的，依次递增.
2^Ω 表示所有子集构成的集合（Ω 的幂集）$2^\Omega = 2^\Omega$

Definition 1.2. 实数域 $\mathbb{R}$ 上的 *Borel* 代数 $\mathcal{B}$：由 R 上的所有开区间生成的 σ 代数

Note 1.2 (生成的)**.** 子集族 $\mathcal{C}$ 生成的 σ 代数，包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ 代数.
本身要是 σ 代数，要包含其他任何的 σ 代数之中.

Note 1.3. σ 代数的交集仍是 σ 代数.

Borel 代数的集合就是 Borel 集.

1.2 概率的表示

Properties 1.1. $\mathcal{F}$ 是事件域, 则 $\Omega \in \mathcal{F}; \emptyset \in \mathcal{F}$

Definition 1.3. $(\Omega, \mathcal{F})$ ：可测空间，在这上面看事件是否发生.

概率：是对于某个代数空间的信息的度量方式．对某个事件赋予取值在 0-1 区间的数，用概率来衡量．数学定义：

Definition 1.4. $(\Omega, \mathcal{F})$ 从 $\mathcal{F}$ 映射到 *[0,1]* 上的集函数满足：*(1)* $A \in F$ *(2) (3)* 可列可加性

Note 1.4. 概率本质上也是一个函数，属于集函数，定义域 $\mathcal{F} \to [0,1]$ 将一个事件 A 映射到 *P(A)*$A \to P(A)$

Definition 1.5. 称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间，其中 Ω 为样本空间，$\mathcal{F}$ 为这个样本空间的事件域，P 是定义在 $\mathcal{F}$ 上的事件域.

可测空间 $(X, \mathcal{F})$，X 的子集 A 称为 $\mathcal{F}$ 可测的，在进一步给出一个测度 μ，就能够构成一个三元组 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 的测度空间，而若那个测度是一个概率测度，就构成上述的概率空间.（概率空间是一类特殊的测度空间）

Definition 1.6 (分布函数 (distribution function))**.** 称 $F_X(x) = P(X \le x) = P(\{\omega : X(\omega) \le x\})$

Definition 1.7. *r.v.* X 取值于 $(a,b]$ 的概率，$P(X \in (a,b]) = P(x \le a) - p(x \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

Properties 1.2. 由任何集合系 $\mathcal{C}$ 生成的 σ-域 $\sigma(\mathcal{C})$ 存在且唯一.

Properties 1.3 (分布函数 Fx 的性质)**.** *1)* 单调不减:$\forall a < b, F_X \le F_X(b)$
2)

$$
\begin{aligned}
P(X = x) = P(\{\omega; X(\omega = x)\}) \\
= P(\{\omega : X(\omega) \le x\}) - P(\{\omega : X(\omega) < x\}) \\
= P(\{\omega : X(\omega) \le x\}) - \lim_{h \to 0} P(X \le x - h) \\
= F_X(x) - F_X(x^-)
\end{aligned}
$$

Definition 1.8 (分布律)**.** *对于一个 Borel 集* $B \in \mathcal{B}$，$P_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ *称为随机变量* X *的分布 (law).*

做法：需要将概率空间转化到分布空间上.

1.3 两种主要的随机变量

1.3.1 纯跳函数

若分布函数不连续，则它只有跳跃型的间断点 $F_X(x) = \sum_{k:x_k \le x} P_k$
其中对于所有的 k，有 $0 < P_k \le k, \sum_k P_k = 1$

Example 1.2. *1. 二项分布* $B(n,p), n = 1,2,3,\cdots, 0 < p < 1$
$P_k = P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,3,\cdots,n$
2. 参数为 λ *的泊松分布* $P_k = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

1.3.2 大多数连续分布有密度

函数 f_x，使得 $F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(y)dy, x \in R$ 且 f_x 满足 $\forall x, f_X(x) \ge 0$

Example 1.3 (三种连续分布)**.** *[a,b] 均匀分布：*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a-b}x, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}$$

指数分布：

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

正态（高斯）分布的函数表达式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

标准正态 (normally distribution): 密度函数 ϕ

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

分布函数

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Note 1.5. *连续分布取任何一点的概率都是为 0.*

1.4 随机变量数字特征

1.4.1 连续型随机变量

若有密度 f_X 则数学期望

$$\mu_X = EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

方差

$$\sigma_X^2 = E[(x-\mu_X)^2] = E[X^2] - (E[X])^2 = \int_R (x-\mu_X)^2 dx$$

对于 $l \in N$，l 阶距：

$$E[X^l] = \int_R x^l f_X(x) dx$$

对于实值函数 g，$g(X)$ 的期望

$$E_g(X) = \int_R g(x) f_X(x) dx$$

1.4.2 离散型随机变量

离散型的随机变量 X 的概率分布为 $p_k = P(X = x_k)$，定义其数学期望或均值：

$$\mu_x = E[X] = \sum_k x_k P_k$$

X 的方差可以定义为：

$$\sigma_X^2 = E[(x-\mu_x)]^2 = \sum_k (x_k - \mu_x)^2 P_k$$

对于 $l \in N$，X 的 l 阶矩可以表示为：

$$E[X^l] = \sum_k x_k^l P_k$$

对于一个实值函数的数学期望：

$$E(g(X))^2 = \sum_k g(x_k) P_k$$

假设一个正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}
&P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) \\
&= P(-1.96 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1.96) \\
&= 0.95
\end{aligned}$$

2σ 原则：对于一个好的正态，取值就是在 μ_x 内的概率约为 95%
3σ 原则：往往在管理学得到应用.

Definition 1.9. 切比雪夫不等式：$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$\forall A \in \mathcal{F}\ I_A = \begin{cases} 1, w \in A \\ 0, w \notin A \end{cases}$

证明. $E[I_A] = P_A$

$$\begin{aligned} & P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \\ & = E[I_{x-\mu \geq \varepsilon}] \\ & = E[I_{(x-\mu)^2 \geq \varepsilon^2}] \\ & \leq \frac{E[(x-\mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

□

1.5 随机向量

Definition 1.10 (有限维随机向量)**.** 设 $X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$ 都是一维的实值，则称 X 为一个随机向量.

Definition 1.11 (分布函数)**.**

$$\begin{aligned} & F_x(X) = P(X \leq x) \\ & F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n) = P(\{X(\omega)\}) \end{aligned}$$

Definition 1.12. 对某个恰当的子集 $B \in R^n (B \in \mathcal{B}(R^n))$
$P_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$ 表示的就是一个 X 的分布.
其中 $\mathcal{B}(R^n)$ 为一个 $Borel$ 集

若随机变量有密度 $f(X)$ 则 X 的分布函数 F_X 可以表示为一个积分的形式.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y) dy_n \cdots dy_2 dy_1$$

其中 x 为随机向量. 对于一个随机向量的密度函数可以满足的是在 R^n 上积分之后得到结果为 1.

Definition 1.13 (边缘分布 (marginal distribution))**.** 将其他部分积分之后就是得到了没有积分的随机向量（随机变量）的边缘密度函数.

若 $f_X(x) = g_1(x_1) g_2(x_2) \cdots g_n(x_n)$. 其中 $g_i \geq 0$ 即 g_i 是一个一维密度函数. 其中 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 之间互相独立.

1.5.1 数字特征

期望 μ_X:

$$\mu_X = E[X] = (E[X_1], E[X_2], E[X_n])$$

协方差矩阵 Σ:

$$\sum = (Cov(x_i, x_j))i, j = 1, 2, 3, , , n$$

(X_i, X_j) 协方差:

$$\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] = E(X_i X_j) - \mu_{X_i}\mu_{X_j}$$

特别的，(X_i, X_i) 的协方差

$$Cov(X_i, X_i) = \sigma_{X_i}^2$$

Example 1.4. 协方差矩阵半正定的.

证明. 对于任意一个向量 y

$$\begin{aligned} y^T \sum y =& y^T E[(X-\mu)(X-\mu)^T]y \\ =& E[y^T(X-\mu)(X-\mu)^T y] \\ =& E[((X-\mu)^T y)^T((X-\mu)^T y)] \\ =& E[||(X-\mu)^T y||^2] \geq 0 \end{aligned}$$

□

Example 1.5. n 维正态分布随机向量 X

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(det\sum)^{\frac{1}{2}}} exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\sum^{-1}(x-\mu)^T\}$$

其中 $\mu \in R^n$
$\sum : n \times n$ 的正定矩阵
$det \sum$ 为 $\sum$ 的行列式
$\mu = EX, \sum = \sum_X$

协方差的标准化 $\rho_{ij} = \frac{Cov(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j}$，证明 $|\rho_{ij}| \leq 1$

Note 1.6. 高斯随机向量的线性变换就是高斯随机向量 $X \sim N(\mu, \sum)$
$A : m \times n$ 矩阵，$AX \sim N(A\mu, A\sum A^T)$

Definition 1.14. $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为随机向量，假设 $f_X(x_1, x_n)$ 为其密度函数，n 个 n 元函数反函数 $x_i = h_i(y_1, y_2, \cdots y_n)$ 若存在 g_i 有连续偏导数，则有分量 $Y_i = g_i(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 给定的随机向量

$$f_Y(y_1, y_2, y_n) = f_x(x_1, x_2, \cdots, x_n) detJ \tag{1}$$

当 $(y_1, y_2, y_n) \in R(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ 其中 $x_i = h_i(y_1, y_2, y_n)$，J 为坐标变换的 *Jacobi* 矩阵.

1.6 独立与相关

cantor 集合论：概率论结合了集合论和测度论，测度就是概率，构成了概率的基础.

Definition 1.15. 若两个事件 A_1 和 A_2 满足:

$$P(A_1, A_2) = P(A_1)P(A_2) \tag{2}$$

则称为它们的相互独立的. 也就是对于一个事件 *A1* 发生对 *A2* 的发生没有影响.

独立与不相容：独立不表示两个随机事件不会同时发生，而不相容是指互相之间不发生.

Definition 1.16 (随机变量独立)**.** X_1 和 X_2 两个随机变量，若 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 则称这两个随机变量相互独立.

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}X_2$$
$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}X_2$$

假设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 事件，对任意整数 $0 \leq k \leq n$ 对于任意下标 $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_n \leq n$ 都有

$$P_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \tag{3}$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 n 个随机变量，若对 $1 < k \leq n$ 任意下标 $1 \leq i_1 < i_2 \cdots i_k \leq n$ 以及 R 中对所有 borel 集都有

$$P(X_i \leq B_{i1}, X_{i2} \in B_{i2}, X_ik \in B_{ik}) = P(X_{i1} \in B_{i1}), P(X_{i_2} \in B_{i_2}) \cdots P(X_{i_n} \in B_{i_n}) \tag{4}$$

则称随机变量之间是相互独立的. 即事件 $\{X_1 \in B_1\}\{X_2 \in B_2\}, \{X_n \in B_n\}$ 等价于

$$F_{X_1,\cdots X_n} = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

Example 1.6. n 维高斯随机向量 X:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n/2}(det\sum)^{1/2}}}exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)\sum(x-\mu)^T\}$$

当且仅当 $\sum$ 为对角矩阵，X 的各分量之间是相互独立的.（高斯随机向量并不等同于任意两个正态分布的随机向量的组合)

Note 1.7. 不相关不能推出独立，但独立可以推出不相关. 但对于 *Gauss RV* 各分量独立和不相关是等价的. 不相关的条件与独立的条件是不同的. 不相关的条件 $Cov(X,Y) = E[X,Y] = 0$, 而独立条件 $p(X,Y) = p(X)p(Y)$

Example 1.7. $X \sim N(0,1), Z = \begin{cases} 1, p = \dfrac{1}{2} \\ -1, p = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

$$\begin{aligned} P(Y \le y) &= P(XZ \le y) \\ &= P(XZ \le y, Z = 1) + P(XZ \le y, Z = -1) \\ &= P(X \le y, Z = 1) + P(-X \le y, Z = -1) = P(X \le y) \end{aligned}$$

Y 和 X 同分布.

$$Cov(X, Y) = E[X, Y] = E[X^2]E[Y] = 0$$

X 与 Y 不相关. 进一步发现 X 与 Y 不独立. (X, Y) 不是高斯随机向量.

Note 1.8. 上例中发现 (X, Y) 没有密度函数. $\int_A f(X, Y)dxdy = 0$ 同样可以推出不相关. (X, Y) 没有密度函数. 同样可以说明连续型随机向量并不一定有密度函数.

Example 1.8. $X \sim N(0,1)$,X 与 $-X$ 同分布，$E[X] = E[X^3] = 0$
$Cov(X, X^2) = E[X^3] - E[X]E[X^2] = 0 \Rightarrow (X, X^2)$
因此，若 X 与 Y 不独立，则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 独立. 反过来不成立.

Example 1.9. (X, Y) 令 $P(X = i, Y = j) =$

2 随机过程

2.1 基本概念

Definition 2.1. 随机变量 X_t 在时间上的随机实现，在某一个空间 Ω 上的随机变量序列

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega)), t \in T, \omega \in \Omega$$

一个随机过程是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的以 T 为指标集的随机变量族，T 可以是 $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ 或非负整数集、非负实数、整数或实数. 对于任意固定的 $t \in T$,X_t 的取值范围称为状态空间，记为 S，其中的元素就称为状态.

Definition 2.2. T 为无穷指标集，设 $(X_t, t \in T)$ 是随机变量的集合，若对任意的 $t_1, t_2, \in T$ 对于随机变量 X_{t_1}, X_{t_2} 都还是相互独立的.

Definition 2.3 (IID)**.** 若对于一个 X_t,$t \in T$ 相互对立，且 $\forall t \in T$ ，X_t 具有相同的分布. 则称为他们是相互独立的.

Note 2.1. 随机过程是一个二元函数: 在固定时间 $t \in T$ 上，X_t 是一个 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 的随机变量; 当样本 $\omega \in \Omega$ 固定时，$X_t(\omega)$ 是一个关于 t 的函数.

Definition 2.4. 若 T 是一个区间: $T = (a, b), (a, \infty)X$ 为一个连续时间过程. 若 T 是元素有限或一个可数集，则称 X 为离散时间过程.（时间序列）

Definition 2.5. *自回归与滑动平均模型 ARMA 模型，假设 $\{Z_t\}$ 为一个 iid 的随机变量序列．阶为 q 的滑动平均模型 ($MA(q)$)*

$$X_t = Z_t + \theta_{t-1} + \theta_q Z_{t-q}, t \in \mathbb{Z}$$

一个一阶自回归模型 (AR(1))

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$$

其中 θ_i 及 ϕ 为实值参数．

2.1.1 随机变量与随机过程

随机变量 X：$\Omega \to \mathbb{R}, \omega \to X(\omega)$
随机过程 X：$\Omega \times T \to S$ 的映射

$$(\omega, t) \to X_t(\omega)$$

S 为 [0,T] 上的函数空间:

$$S = \{f(t), t \in [0, T]\}$$

$$X : \Omega \to S, \omega \to X(\omega) \in S$$

其中 X 称为随机元．$X(\omega)$ 为关于 t 在函数空间 S 中的一个函数．

Definition 2.6. *(随机过程的分布是有限维的分布的集合) 随机过程 X 的有限维分布是指在有限维随机向量 $(X_{t1}, X_{t2}, \cdots, X_{tn})$ 是关于 t 的分布．*
其中 $n \geq 1$ 是任意自然数，$t_1, t_2, t_n \in T$ 是关于时间的所有可能选择.

Definition 2.7 (高斯过程)**.** *若一个随机过程的有限维分布都是高斯分布．则称为高斯过程.*

Example 2.1. *T=[0,1] 相互独立的且都服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量，构成高斯过程.*

有限维分布

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \cdots, X_{t_n} \leq x_n) \\
&\qquad = P(X_{t_1} \leq x_1) P(X_{t_2} \leq x_2) \cdots P(X_{t_n} \leq x_n) \\
&\qquad = \Phi(x_1)\Phi(x_x)\cdots\Phi(x_n)
\end{aligned}$$

对于任意的 $t \leq 1, X \in \mathbf{R}^n$

随机过程作图，可以画出一个样本轨道:

2.2 期望和协方差函数

期望函数

$$\mu_X(t) = E[X_t]$$

协方差函数:

$$C_x(t, s) = E[(X_t, \mu_x(t))(X_s - \mu_X(s))] = E[X_t X_s] - \mu_X(t)\mu_X(s)$$

其中：$E[X_tX_s] = R_X(t,s)$ 是一个自相关函数．方差函数：$\sigma_X^2(t) = E[X_t^2] - \mu_X^2(t)$

Note 2.2. 高斯过程是一个通过期望函数和协方差函数就可以决定了，非高斯过程不一定

$$\begin{cases} \mu_X(t) = 0, s = t \\ C_X(t,s) = 1, s \neq t \end{cases}$$

相关结构：称 $X = (X_t, t \in T)$ 是严格平稳的，有限维的分布关于指标 t 是平移不变的．

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_n}) \Rightarrow (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \cdots, X_{t_n+h})$$

对于所有的可能指标选择 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 及 $t_1 + h, t_2 + h, \cdots, t_n + h \in T$

可以认为在变化过程中往右移动，同分布，但取值完全不一样．

Example 2.2 (平稳高斯过程)**.** 对于高斯过程，上式可以简化为 $\forall h$ 使得 $s+h, t+h \in T$ 的 $t, s \in T$，有期望函数平移不变，协方差函数也平移不变．(高斯过程只是由参数期望和协方差函数决定)
即对于 $t \in T$

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= \mu_X(t+h) \\ C_X(t,s) &= C_X(t+h, s+h) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mu_X(t) = \mu_X(0) \\ C(t,s) = \hat{C}_X(|t-s|) \end{cases}$$

其中 ***t-s*** 是给定的．

对于高斯过程，严格平稳等价于期望函数为常值函数，协方差依赖于距离 $|t-s|$ 一般来说，一个过程 X 满足上述过程，就称为宽平稳过程（平稳过程：一个不会随时间变化而改变）．
令 $X = (X_t, t \in T)$ 是一个随机过程，$T \subset \mathbf{R}$ 是一个区间，若 $\forall t, s \in T$ 使得 $t+h, s+h \in T$ 有

$$X_t - X_s = X_{t+h} - X_{s+h}$$

称 X 具有平稳增量的 (stationary increment)．换句话说，平稳就是不变的增量对于存在的一个 h．
若对于任意 $t_i \in T$ 且（书本上有）

2.3 布朗运动

f

Definition 2.8 (布朗运动 (Brownian motion))**.** 若一个随机过程 $B = (B_t, t = 0)$ 满足：
1. 从零点出发，$B_0 = 0$*;*
2. 具有平稳独立增量*:* 两个区间需要互不相交的*;*
3. 对每个固定的 t，$B_t \sim N(0,t)$*;*
4. 具有连续样本轨道*;* 则称随机过程 B 为标准布朗运动或维纳 *(wiener process)*.

非标准：方差不一定为 t，布朗运动，初始值规定为 0，系数为 1．4. 可以从 1，2，3 中推导出．

2.3.1 布朗运动-数字特征

$$\mu_B(t) = E[B_t] = 0$$

$$\sigma_t = Var(t) = t = E[B_t^2]$$

协方差函数：$C_B(S_t) = R_B(s,t) = E[B_s, B_t]$ 当 $t \geq s$ 时候，$C_B(s,t) = E[B_s(B_t - B_s + B_s)] = E[B_s(B_t - B_s)] + E[B_S^2]$ 同理可得：$t < s$ 时，$C_B(s,t) = t \Rightarrow C_B(s,t) = \min(s,t)$

布朗运动是一个高斯过程.（全部的有限维分布是高斯分布）

有限维分布 $\forall n \in N, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$(B_{t1}, B_{t2}, B_{t3}, B_{tn})^T = (B_{t1}, B_{t2} - B_{t1} + B_{t1}, \cdots, B_{tn} - B_{tn-1} + B_{tn-1} - B_{t1})$$

其中 $B_{tn} - B_{tn-1}$ 是一个区间.

高斯过程是由期望和方差所决定的. 布朗运动等价定义于 BM 是期望为 0，协方差函数为 $\min(s,t)$ 的高斯过程.

轨道性质：处处不可微和全变差无界.

Note 2.3. *柏松过程是依概率连续,probablity continuity*

自相似过程：若一个随机过程 $X_t, t \geq 0$ 满足：$(X_{at_1}, X_{at_2}, \cdots X_{at_n}) = (a^H X_{t1}, a^H X_{t2}, \cdots, a^H X_{tn})$ 其中 $\forall a > 0, \forall n \in N, 0 \leq t_1, \cdots t_n$ 则称 H 是一个自相似的，H 称为自相似指数.

Note 2.4. *自相似过程的轨道是几乎处处不可微的*

$B.M.$ 是一个 $\frac{1}{2}$ 自相似过程

$$(B_{at_1}, B_{at_2}, \cdots B_{at_n}) = (a^{\frac{1}{2}} X_{t1}, a^{\frac{1}{2}} X_{t2}, \cdots, a^{\frac{1}{2}} X_{tn})$$

进一步可推出 BM 的轨道几乎处处不可微的.(几乎处处不可微的概率为 1) $P(properitiesQ) = 1 \Rightarrow properitiesQ$

级数：weierstrass 构造了

$$W_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x)$$

布朗运动也称为维纳过程 (Wiener Process)

$$P(\text{处处不可导}) = 1$$

模拟布朗运动，全变差无界，B.M. 的全变差 (Total variation)

$$TV_B = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|$$

2.4 泊松过程 (Poissson process)

Definition 2.9 (计数过程)**.** 假设 $\{N_t\}$ 表示的是 $(0,t]$ 上的某个随机事件发生的次数，$\{N_t, t \geq 0\}$ 为计数过程. 其中 t 表示一个时间点.

对于一个计数过程来说:

- $\{N_t\} \geq 0$;
- $\{N_t\}$ 的取值非负整数;
- $\forall t > s, N_t \geq N_s$;
- $\forall t > s, N_{s,t} = N_t - N_s$ 表示的是 $(s,t]$ 的事件发生的次数.

2.4.1 泊松过程的构造

我们考虑一系列的指数 RI$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$，它们具有相同的均值 $\frac{1}{\lambda}$. 我们建立这样的一个模型，其中的一个事件（称为跳跃）随时可能发生. 第一次跳跃在 τ_1 时刻发生，第二次在 τ_2 时刻，第三次在 τ_3 等等. 随机变量 τ_k 称为间歇时间. 第 n 次发生跳跃的时刻为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$$

柏松过程 $N(t)$ 给出了截止时刻 t 跳跃的次数.

$$N(t) = \begin{cases} 0, if 0 \leq t \leq S_1 \\ 1, if S_1 \leq t \leq S_2 \\ \vdots, \vdots \\ n, if S_n \leq t \leq S_{n+1} \end{cases}$$

Definition 2.10. 对于一个计数过程 $\{N_t\}$ 计数过程
$N_0 = 0$; 具有独立平稳增量; $\forall t > 0, N_t \sim P(\lambda t)$ 即

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

则认为为强度 λ 的柏松过程.

一个计数过程增加一些性质到泊松过程的转换.

Example 2.3. $\forall t > s$

$$N_{s,t} = N_t - N_s = N_{t-s} - N_0 \sim P(\lambda(t-s))$$

其中 $N_t - N_s$ 与 N_s 独立.

2.4.2 泊松运动-数字特征

$\mu_N(t) = E[N_t] = \lambda t$
$\sigma_N^2(t) = Var(N_t) = \lambda t$
$E[N_t^2] = \lambda t + (\lambda t)^2$
自相关函数 $R_N(t,s) = E[N_t, N_s]$
当 $t \geq s$ 时

$$E[N_t, N_s] = E[(N_t - N_s + N_s)N_s] = E[N_t - N_s]E[N_s] + E[N_s]^2 = \lambda^2 ts + \lambda s$$

当 $t < s$ 时，

$$R_N(t,s) = \lambda^2 ts + \lambda$$

因此 $R_n(t,s) = \lambda^2 ts + \lambda \min(t,s)$

Definition 2.11 (泊松等价定义)**.** 假设 $\{N_t\}$ 为一个计数过程，$N_0 = 0$ 具有平稳独立增量；

$$P(N_h = 1) = \lambda h + o(h), \forall h > 0$$

$$P(N_h \geq 2) = o(h), \forall h > 0$$

则称强度为 λ 的柏松过程. 其中给定 $\{N_h\}$ 控制住，再考虑一个计数的大小的变化对 P 的影响.

$$P(N_h = 0) = 1 - P(N_h = 1) - P(N_h \geq 2) = 1 - \lambda h + o(h)$$

在单位时间内，到达车站的数学期望相同，所以实际生活中将时间区间划分为等长 n 段，每段时间 t_i 内，有一个乘客到达车站的概率近似与这段时间呈 $\frac{1}{n}$ 正比，比例系数 λ，正好一个乘客到达的概率 $P = \frac{\lambda}{n}$，同时假定 n 很大时候，要有两个乘客是不太可能的，因此没有乘客到达的概率 $P = 1 - \frac{\lambda}{n}$ 每一个乘客与其他乘客的到达无关，进一步就可以定义 n 个随机变量 $X_i(t)$，表示第 i 个乘客在 t 时刻的状态 $X_i(t) = \{0, 1\}$
所有随机变量加总就是总人数，这个 t 时刻的总人数就是一个 Possion 分布.

$$P\{X = k\} = P\{\sum_{i=1}^{n} X_i(t) = k\} = C_k^n (\frac{\lambda t}{n})^k (1 - \frac{\lambda t}{n})^{n-k}$$

平稳独立增量：在车流是平稳的. 大体的分布相同.

Definition 2.12 (强度 (intensity))**.** $\lambda = \frac{EN_t}{t}$ 单位时间内随机事件发生的次数.

证明. Problem1: 假设某个路口的车流是一个泊松过程，每分钟平均经过 5 辆车，求：
1）前 3 分钟内经过 4 辆车的概率；
2）前 2 分钟经过 3 辆车并前 3 分钟经过 5 辆车概率；
3）前 2 分钟经过 2 辆车，前 3 分钟经过不多于 6 辆的概率.
Problem2: 设 $\{N_t > 0\}$，是强度 λ 的泊松过程，$T > 0$，令 $M_t = \frac{1}{T}\int_0^T N_t dt$. 求 $E[M_T]$ 和 $Var(M_t)$ 提示：Riemnan 积分符号可以与期望符号交换次序. □

令 X_n 表示第 n-1 事件与 n 事件发生的时间间隔；令 S_n 表示第 n 个时间的等待时间

$$
\begin{aligned}
X_n &= S_n - S_{n-1} \\
S_n &= \sum_{k=1} X_k \\
X_1 &= S_1
\end{aligned}
$$

$X_1, X_2, \cdots X_n$ 是独立同分布的随机变量序列，都服从均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布．参数为 λ

$$
S_n \sim \Gamma(n, \lambda)
$$

其中，

$$
\Gamma \sim f(t; n, \lambda) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, t \geq 0
$$

t 为自变量，n 为形状参数，λ 为尺度参数．

2.5 有漂移的布朗运动

设 $\{B_t, t \leq 0\}$ 为标准布朗运动，$\forall \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$，有

$$
X_t = \mu_t + \sigma B_t, t \geq 0
$$

称 $\{X_t, t \leq 0\}$ 为有漂移的布朗运动，其中 μ_t 为漂移系数，σ 是一个扩散系数（方差参数），记为 $BM(\mu, \sigma^2)$．
等价地，若随机过程 $\{X_t, t \leq 0\}$ 为平稳独立增量，$X_t - X_0 \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$，则称 $\{X_t, t \leq 0\}$ 为有漂移的布朗运动．
其期望和方差分别为：

$$
\begin{aligned}
E[X_t] &= \mu_t \\
\sigma^2(X_t) &= \sigma^2 t \\
C_x(s,t) = R_x(s,t) &= \sigma^2 \min(s,t)
\end{aligned}
$$

2.6 几何布朗运动

设 $\{B_t, t \leq 0\}$ 为标准布朗运动，$\forall \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$，有

$$
X_t = e^{\mu t + \sigma B_t} \tag{5}
$$

方程5 显然不是一个高斯过程（非对称即可看出）
由于其矩母函数为 $E[e^{\sigma B(t)}]$，所以一个标准的几何布朗运动期望与方差

$$\begin{aligned}E[X(t)] =&E[e^{B(t)}] = e^{t/2};\\ \mathrm{Var}[X(t)] =&E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2\\ =&E[e^{2B(t)}] - e^t\\ =&e^{2t} - e^t.\end{aligned}$$

t 是一个时间变量，不是一个随机变量．而求期望是对于 ω 进行求解．

$$E[e^{\sigma B_t}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t} exp - x^2/2t} e^{\sigma x} dx = exp(\frac{\sigma^2}{2} t)$$

若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E[e^Z] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ $C_x(s,t) = R_x(s,t) - E[X_t][X_s]$
$R_X(s,t) = E[X_t, X_s] = exp(\mu(t+s))E[exp(\sigma(B_t + B_s))]$
当 $t \geq s$ 时，$E[exp(\sigma(B_t + B_s))] = E[exp(\sigma(B_t - B_s))]E[exp(2\sigma B_s)]$

$$C_X(s,t) = exp((\mu + \frac{\sigma^2}{2})(t+s))(exp(\sigma^2(\min(t,s))) - 1) \tag{6}$$

在金融市场中，人们经常假定股票的价格按照几何布朗运动变化，在下面的例子中我们如此假定．

Example 2.4 (股票期权的价值). *设某人拥有某种股票的交割时刻 T 为、交割价格 K 为的欧式看涨期权，即他 (她) 具有在时刻 T 以固定的价格 K 购买一股这种股票的权力．假设这种股票目前的价格为 y，并按照几何布朗运动变化，我们计算拥有这个期权的平均价值．设 $X(T)$ 表示时刻的股票价格，若 $X(T)$ 高于 K 时，期权将被实施，因此该期权在时刻 T 的平均价值应为．*

$$\begin{aligned}(X(T)-K)^+ =&E[\max(X(T)-K, 0)]\\ =&\int_0^\infty P\{X(T) - K > u\}\, du\\ =&\int_0^\infty P\{ye^{B(T)} - K > u\}\, du\\ =&\int_0^\infty P\{B(T) > \log\frac{K+u}{y}\}\, du\\ =&\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_0^\infty \int_{\log[(K+u)/y]}^\infty e^{-\frac{x^2}{2T}}\, dx\, du.\end{aligned}$$

2.7 布朗桥

由布朗运动，我们可以定义另一类在数理金融中经常用到的过程——Brown 桥过程．

Definition 2.13. *假设 $\{B_t, t \geq 0\}$ 是一个布朗运动．令*

$$X_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1$$

则称 $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$ 为布朗桥．

因为布朗运动是高斯过程，所以布朗桥也是高斯过程，其 n 维分布由均值函数和方差函数完全确定.

$$X_0 = 0$$
$$X_1 = 0$$

因此在始终端相同的大小，构成了一个“桥”状的过程. $\forall 0 \leq s \leq t \leq 1$ 有

$$\begin{aligned}
E[X_t] =& 0, \\
E[X_s X_t] =& E[(B(s) - sB(1))(B(t) - tB(1))] \\
=& E[B(s)B(t) - tB(s)B(1) - sB(t)B(1) + tsB^2(1)] \\
=& s - ts - ts + ts = s(1-t) \\
=& \min(s,t)[1 - \max(s,t)].
\end{aligned}$$

3 条件期望

Definition 3.1 (条件概率)**.** 给定事件 B 之下的 A 的发生概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

A 与 B 相互独立 $\rightleftarrows P(A|B) = P(A)$，也就是，A 与 B 相互独立下，A 发生不会影响概率 B 的判断.
每一个事件都可以看作是一个条件概率，在概率空间 $(\Omega, P, \mathcal{F})$ 下，$P(A) = \frac{P(A)}{P(\Omega)}$ 其中的条件概率 $P(A|B)$，也可以理解为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ 概率空间从 $\Omega \to B$
给定事件 B 之下的 A 的发生条件，随机变量 X 的条件分布为 $F_X(x|B) = \frac{P(X \leq x, B)}{P(B)}$
随机变量 X 的条件期望为

$$E[X|B] = \frac{E[XI_B]}{P(B)}$$

其中 I_B 为一显性函数. 可以认为在 B 上求加权平均，转变为条件概率.
假设 $\Omega = \mathbb{R}$，其中 X 是离散随机变量 $x_1, \cdots, x_n$，

$$E[X|B] = \sum_{k=1}^{\infty} X_k P(\{X = x_k\} \cap B)/P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(X = x_k|B)$$

以条件概率的形式表示；若是一个连续型随机变量，则条件数学期望为

$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_{-\infty}^{+\infty} x I_B(x) f X(x) dx = \frac{1}{P(B)} \int_B x f_X(x) dx$$

Example 3.1. 均匀分布的随机变量条件期望，在样本空间 $\Omega = [0,1]$ 上的随机变量 $X(\omega) = W$. 定义概率 $P((a,b])) = b - a, \forall a \leq b \leq 1$ X 服从均匀分布 $U([0,1])$，分布函数

$$F_X(x) = P(\{\omega : \omega \leq x\}) = \begin{cases} p(\phi) \\ p([0,x]) \end{cases}$$

假设事件 $A_i = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}), i = 1, 2, \cdots, n$ 之中有一个发生.

$$E[X|A_i] = \frac{1}{P(A_i)} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x \cdot dx = n\frac{1}{2}x^2 = \frac{2i-1}{2n}$$

Note 3.1. 条件期望是对原有的概率空间的估计的一个修正.

考虑一个离散型随机变量 Y 在集合 A_i 上取不同的值，即 $A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}$，由此可见 A_i 是一个互不相容的集合. $A_i \cup A_j = \varnothing$ 及 $\cup_i A_i = \Omega$
假设随机变量有限，定义在 X 上的随机变量 Y 的条件期望:

$$E[X|Y](\omega) = E[X|A_i] = E[X|Y = y_i], \quad \forall \omega \in A_i$$

将 $E[X|A_i]$ 看作离散型随机变量在 A_i 上的取值. 对于一个 $E[X|Y]$ 也是一个离散的随机变量.

Properties 3.1. 线性: $\forall C_1, C_2$ 为常数

$$E[C_1X_1 + C_2X_2] = C_1E[X_1|Y] + C_2E[X_2|Y$$

Properties 3.2. $E[X] = E[E[X|Y]]$ 对于整体的平均等于部分的平均再平均.

证明. 对于离散的情况，我们有

$$\begin{aligned}
E[E[X|Y]] &= \sum_y E[X|Y = y] \cdot P(Y = y) \\
&= \sum_y \left(\sum_x x \cdot P(X = x|Y = y)\right) \cdot P(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x x \cdot P(X = x|Y = y) \cdot P(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x x \cdot P(Y = y|X = x) \cdot P(X = x) \\
&= \sum_x \sum_y x \cdot P(Y = y|X = x) \cdot P(X = x) \\
&= \sum_x x \cdot P(X = x) \cdot \left(\sum_y P(Y = y|X = x)\right) \\
&= \sum_x x \cdot P(X = x) = E[X]
\end{aligned}$$

□

Note 3.2. 其中隐含一个重要思想是，先在局部进行平均，之后在全局进行平均.

Properties 3.3. 若 Y 与 X 独立，则 $E[X|Y] = E[X]$.

证明. $\forall \omega \in \Omega$

$$E[X|Y](\omega) = E[X|A_i] = \frac{E[XI_{A_i}]}{P(A_i)}$$
$$= \frac{E[X]E[I]_{Y=y_i}}{P(A_i)} = EX$$

因此 $\forall \omega \in \Omega$，是否有 Y 都不影响对 X 的判断，因此仍然是 EX □

条件期望 $E[X|Y]$ 不是 X 的函数，随机变量 X 只是决定了函数的类型．$E[X|Y] = g(Y)$，其中 $g(y) = \sum_{i=1} E[X|Y = y_i]I_{y_i}(y)$

Definition 3.2. $Y = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 为 n 维的随机向量，则 σ 为包含以下形式的最小 *sigma* 代数

$$\{Y \in (a, b]\} = \{\omega : a_i < Y_u(\omega) \leq b_i, i = 1, 2 \cdots, n, -\infty < a_j, b_j < \infty, j = 1, 2 \cdots, n\}$$

称 $\sigma(Y)$ 是 Y 生成的 σ 代数．$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n), b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

Definition 3.3. 对于随机过程 $Y = Y_t, y \in T$ 假设 $\sigma(Y)$ 是包含以下形式集合的

$$\{\omega : \quad (Y_t(\omega, t \in T) \quad C\}$$

其中 C 是由 T 上的函数组成的一个恰当的集合．则称 $\sigma(Y)$ 为随机过程 Y 生成的 σ 代数．

Borel 可测函数：一般所见的都是 Borel 可测集生成的可测函数

Example 3.2. 假设 $B = (B_s, s \leq t)$ 为 $(0, t]$ 上的 BM，令 $\mathcal{F}_t = \sigma(B) = \sigma(B, s \leq t)$ 包含了 BM 在 $[0, t]$ 上最小的 σ 代数．

它是由以下集合构成：
$$A_{t_1, t_2, t_n}(C) = \{\omega : B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega), \cdots, B_{t_n}(\omega) \in C\}$$
其中 C 为任意的 n 维 Borel 集
令 f 是作用在 Y 上的函数．$\{w : f(Y) \in C\}$C 为一个 Borel 集．$\sigma(f(Y)) \subset \sigma$ 因此信息会减少．
对于一固定 t 来考虑 $f(B) = B_t$，所包含的信息为 $\sigma(B_t)$

Definition 3.4. 称 σ 代数 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 相互独立，若 $\forall A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$ 则相互独立．称随机变量（过程）X 与 σ 代数相互独立，若 $\sigma(X)$ 与 $\mathcal{F}$ 相互独立．称随机变量（向量、过程）X 与 Y 相互独立，若 $\sigma(X)$ 与 $\sigma(Y)$ 相互独立．

定义随机变量/向量/过程关于 σ 代数 $\mathcal{F}$ 可测，若 $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ 称随机变量 X 关于 Y 可测，若 $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$

3.1 一般条件期望

给定 σ 代数 $\mathcal{G}$，若一个随机变量 Z 满足

- $\sigma(Z) \subset \mathcal{G}$

- $\forall A \in \mathcal{G}, E[X|I_A] = E[ZI_A]$
- $\forall A \in \mathcal{G}, E[XI_A] = E[ZI_A]$

则称随机变量 Z 为给定的 σ 上的 G 的条件下的随机变量 X 的条件期望．特别的，$\mathcal{G} = \sigma(Y)$，则

$$E[X|Y] = E[X|\mathcal{G}]$$

其中随机变量 X 不一定可测．
Y 为离散型随机变量，在 A_i 的取值 $\sigma(Y)$ 的 A 有以下形式：

$$A = \cap A_i$$

同时 $Z(\omega) = E[X|A_i], \forall \omega \in A_i$ 而 Z 是 Y 的函数．Z 关于 Y 可测，同时对于 A 来说．

$$E[XI_A] = E[XI_{\cap A_i}] = E[x \sum_{i=1} I_{A_i}]$$

所以 Z 为 $\sigma(Y)$ 的条件下的 X 的条件期望．

3.2 σ 代数补充

对于一个 Ω 上的离散型随机变量 Y，在集合 A_i 上取值不同数值 y_i，即

$$A_i = \{\omega | Y(\omega) = y_i\}$$

显然 (A_i) 是一互不相容的分割．

$$i \neq j, A_i \cap A_j = \phi$$

一些基本的 σ 域

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{\phi, \Omega\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\phi, \Omega, A, A^c\} \\ \mathcal{F}_2 = P(\Omega) &= \{A; A \subset \Omega\} \end{aligned}$$

$\mathcal{F}_3$ 是最大的 σ 域，$\mathcal{F}_1$ 是 Ω 上最小的 σ 域．其中满足这样的等式关系

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$$

假设现如今有一个 $\mathcal{C}$ 类，而并不一定是一个 σ 域，因此在往其中添加一些集合，总是能够达到 σ 域的要求．

Definition 3.5. *对给定的 Ω 的子集组成的集类 $\mathcal{C}$，存在一个包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ 域 σ*

由离散型生成 σ 域在之前构造中，利用的是不同取值的 y_i 所生成的 σ 域，定义子集 $A_i = \{\omega | Y(\omega) = y_i\}$ 这些子集构成的是互不相容的划分，也就是

$$A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$$

取

$$C = \{A_1, A_2, \cdots\}$$

在 σ 域内，是可数个并构成的集合

$$A = \cup_{i\in I} A_i$$

其中所得到的集合构成的是一个 σ 域，记 $A = \sigma(Y)$ 这些之中必然是在 $\sigma(C)$ 内，因此 $\sigma(Y) = \sigma(C)$，即 $\sigma(Y)$ 是一个随机变量 Y 生成的 σ 域

Definition 3.6 (Borel 集)**.** *取 $\Omega = \boldsymbol{R}$ 及*

$$C^{(1)} = \{(a, b] | -\infty < a < b < +\infty\}$$

包含的是所有普通子集，被称为 Borel σ 域，元素被称为是 Borel 集.

$$C^{(n)} = \{(a, b] | -\infty < a_i < b_i < +\infty\}$$

是一个 Borel 集，给定子集是一个 Borel 集，需要经历可数个交运算.

3.2.1 可测函数

Definition 3.7 (可测函数)**.** *从可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 到 $(\bar{R}, \mathfrak{B}_{\bar{R}})$ 的可测映射称为是在 $(X, \mathcal{F})$ 上的可测函数. 特别的，从 $(X, \mathcal{F})$ 到 $(R, \mathfrak{B}_R)$ 上的可测映射（记为 f）称为 $(X, \mathcal{F})$ 的有限值可测函数或随机变量.*

我们可通过这一定义看出随机变量是在可测函数范围下的定义，而其中的 $\mathfrak{B}_{\bar{R}} \overset{def}{=} \sigma(\mathfrak{B}_R, \{-\infty\}, \{\infty\})$

Theorem 3.1 (可测函数的运算)**.** *若 f，g 是可测函数，则*

1. *对任何的 $a \in \bar{R}$，af 也是可测函数;*
2. *若 $f + g$ 有意义的，则对于每一个 $x \in X$，$f(x) + g(x)$ 均有意义，它是一个可测函数*
3. *fg 也是一个可测函数*
4. *f/g 在 $g(x) \neq 0$*

Definition 3.8. *设 P 和 Q 是测度空间上的两个概率测度，若*

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F}$$

称这个两个概率测度等价.

Theorem 3.2. *假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间，随机变量 $Z > 0$，且 $E(Z) = 1$，定义*

$$Q(A) = \int_A z(\omega) dP(\omega)$$

则 Q 是与 P 等价的概率测度.

3.3 条件期望投影性

假设 $\mathcal{G}$ 是一个 σ 代数，$L^2(\mathcal{G})$ 是在 Ω 之下的一条件随机变量的集合

$$E[Z^2] < +\infty$$
$$\sigma(Z) \subset \mathcal{G}$$

随机变量 $E[X|\mathcal{G}]$ 可理解为在信息 $\mathcal{G}$ 下的修正（贝叶斯学派），在函数类 $L^(\mathcal{G})$ 中条件期望有某种意义的最优属性.
一个条件概率 $E[X|\mathcal{G}$ 的投影：相当于顶点到上面的垂线. 若 $x \in L^2(\mathcal{G})$，则 $E[X|\mathcal{G}|^2] = \min E[|X - Z|^2]$ 能够在 g 中取到的误差最小的.

证明. 若 $X \in L^(\mathcal{G})$，则 $E[X|\mathcal{G}] \subset L^2(\mathcal{G})$ 因为 $E[|E[X|\mathcal{G}]|^2]$ 没有关于 X 和 Z 的其他信息，无法得到相互独立. 无法得知两个相互独立.

$$E[(X - E[X|\mathcal{G}])](E[X|\mathcal{G}] - Z) = E[E[(X - E[X|\mathcal{G}])(E[X|\mathcal{G} - Z]|\mathcal{G})]] =$$

$$\Rightarrow E[|X - E[X|\mathcal{G}]|^2] \le E[|X - Z|^2]$$

等号在 $Z = E[X|\mathcal{G}]$ 时候取得. □

实际上在建立图形时候，会看到勾股定理在条件期望中的应用.

3.4 测度论视角下的期望

Definition 3.9. 概率空间下 $(X, \mathcal{F}, P)$ 上的可测函数 f 的积分存在，说明其数学期望存在

$$Ef \overset{def}{=} \int_X f dP$$

称为数学期望，或简称为期望.

Theorem 3.3. 若 f 为概率空间 $(X, \mathcal{F}, P)$ 上的随机变量，其分布函数为 F，若对任何在 $(R, \mathcal{B}_r$ 上的可测函数 g，$g \circ f$ 是上的可测函数，只要

$$E(g \circ f) = \int_R g dF$$

一端成立，另一端也就成立.

假设 k 为一个正整数，若 $E|f|^k < \infty$ 成立，称随机变量 f 的 k 阶矩存在并将 Ef^k 称为 k 阶矩和 k 阶中心矩.

假设 $(X, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间，f 是其上面积分存在的随机变量，又假设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子域，即 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. 对每一个 $A \in \mathcal{G}$ 令

$$\varphi(A) = \int_A f dP$$

可看出 φ 是 $\mathcal{G}$ 下的符号测度. 它和限制在 $\mathcal{G}$ 上的测度 P 之间有关系 $\varphi << P$. 因此存在使得 $A \in \mathcal{F}$ 有

$$\varphi(A) = \int_A E(f|\mathcal{G})dP$$

利用 $E(f|\mathcal{G})$ 性质，可将条件期望和条件概率公理化.

Properties 3.4. $E(f|\mathcal{G})$ 是 $(X, \mathcal{G}, P)$ 上积分存在的可测函数. 对任何的 $A \in \mathcal{G}$ 有

$$\int_A E(f|\mathcal{G})dP = \int_A f dP$$

其中 $P(A|\mathcal{G}) \overset{def}{=} E(I_A|\mathcal{G})$ 称为事件 A 关于子 σ 域的条件概率.

4 Martingale 鞅

首先对于 Martingale 进行解释：Martingale 是一个法语词，（一）公平赌博；（二）马车上的皮带. 我们先考虑一个博弈：$(\eta_n)_n \geq 1$ 为 iid 的随机变量序列. 满足 $P(\eta_n = 1) = p, P(\eta_n = -1) = 1 - p = q$. 假设

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \eta_{k-1}) \cdot \eta_k$$

则 $E[\xi_{n+1}|\xi_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n] = \xi_n + b_{n+1}(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_n)E(\eta_{n+1})$ 当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时 $E[\xi_{n+1}|\eta_1, \cdots, \xi_n] = \xi_n$，这说明当我们的博弈是公平时，无论取何种博弈策略，ξ_{n+1} 的最佳预测函数是 ξ_n，即

$$E[\xi_{n+1}|\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_n] - \xi_n$$

任何时刻的预测，都不会得到关于输赢的信息.

Definition 4.1 (鞅)**.** 假设 $\mathcal{F}_{t>0}$ 是 Ω 上的 σ 代数，$\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$，我们称 $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ 为 σ 域流. 随着时间的递增，信息会越来越多. 一族事件，可能是不可列的. 若 $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \cdots)$ 是 Ω 上的 σ 域序列，对所有的 n 有 $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$，则称 $(\mathcal{F}_n)$ 也是一个 σ 域流.

实际上，信息流就是递增的信息.

Definition 4.2. 离散时间下，$\mathcal{F}_n$ 是 Ω 上的 σ 代数列，同时 $\forall n$，$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$，则称 $\mathcal{F}_n$ 为信息流.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$$

随机过程 Y 的适应性意味着 Y_t 没有提供更多的信息.

属于与包含之间的差异

Definition 4.3. 若对于 $\forall t > 0$ 有 $\sigma(Y_t) \subset$ 则称随机过程 $Y = (Y_t, t > 0)$，适应于信息流 $(\mathcal{F}_t)$*(adaptive to)*（对于任意的 t 都是如此）

$Y = (Y_t, t > 0)$ 总是适应于一个自然信息流 $(\mathcal{F}_t = \sigma(Y_t, s \leq t)$. t 在于 t 之前的信息. 今天及以前的信息. 都是适应于 y_t.

Definition 4.4. 假设 $(\Omega.\mathcal{F},P)$ 是完备的概率空间 $\{\mathcal{F},n=0,1,2\cdots,\}$ 是 $\mathcal{F}$ 内的 σ 代数，并使得 $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_{n+1},n\geq 0$ 称之为 σ 代数流．随机过程 $\{X_n,n=0,1,2\cdots\}$ 称为 $\{\mathcal{F}_n\}$ 是适应的．若 $\forall n\geq 0$．X_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的，此时称 $\{X_n,\mathcal{F}_n,n\geq 0\}$ 为适应列．

σ 代数反映了对时间变化下，逐步增加对对过去和现在的信息．信息流与 σ 代数：信息流是一族 σ 代数．

给定信息流，若随机过程 $X=(X_t>0)$ 满足条件

- $\forall t\geq 0$，有 $E[|X_t|]<+\infty$（绝对可积）
- x 适应于 $(\mathcal{F}_t,t\geq 0)$（在 t 时刻可测）
- $\forall t>0$

第三可推导出第二条，取 X=t 的话，关于他的条件期望，本身就是可测的．
$X_t=B_t^2-t$，$t\geq 0,E[X_t|\mathcal{F}]=X_s$ 是一个关于布朗运动的信息流．

将上式中的改写为 $E[X_t-X_s|\mathcal{F}_t]=0$．其经济含义为：当前的 F 时刻，现有的信息对财富的增量的最好估计为 0. 筹码等价下，最好的估计为 0，也就是公平赌博．

离散时间：信息流 $(\mathcal{F}_n,n=0,1,2)$，若 $X=(X_n,n=0,1,2\cdots,n)$

- $\forall n=0,1,2,\cdots,n,E[X_n]<+\infty$
- x 适应于 $(\mathcal{F}_n)$
- $\forall n=0,1,2\cdots,n$ 则

可改写为 $E[X_{n+1}-X_n|E]=0$ $Y_n=X_{n+1}-X_n$ 则称序列 (Y_n) 为鞅差序列．

$$E[Y_n|\mathcal{F}_n]=0$$

Properties 4.1. 鞅数学期望函数为一个常数．

连续时间下同时取数学期望，就会有 $E[X_t]=E[E[X_t|\mathcal{F}_s]]=E[X]$ 对 $\forall s\leq t$ 都成立，也即一个常数．

其逆否命题为：任取随机过程 (Y_t)，定义 $X_t=Y_t-E[Y_t]+C$ 但 (X_t) 并不一定是鞅．

Definition 4.5. 若 $E[X_t|\mathcal{F}_s]\geq X_s$ 称 X 为关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的下鞅，若改为 $E[X_t|\mathcal{F}_s]\leq X_s$，称为上鞅．

Corollary 4.1. 适应列 $\{X_n,\mathcal{F}_n\}$ 是下鞅当且仅当 $\{-X_n,\mathcal{F}_n\}$ 是上鞅．
线性组合：若上鞅与上鞅的线性组合之后仍然是上鞅；

两个随机变量之间的关系，并不仅仅有大于等于小于的情况．一部分的样本是大于等于，另一部分可能小于等于．因此下鞅和上鞅是较为特殊的过程．

估计是一个部分平均，也还是有可能会低于．因此进一步定义一个增过程：

Definition 4.6. $\forall s\leq t,X_t\geq X_s$，则称 X 为增过程．

5 随机积分

考虑一个投资策略 (H_n) 关于证券价格 (X_n) 的随机积分是

$$Y_n = Y_0 + H_0(X_1 - X_0) + H_1(X_2 - X_1) + \cdots + H_{n-1}(X_n - X_{n-1}) \tag{7}$$

这个积分在金融意义上，进一步对于连续时间的随机积分形式为

$$\int_0^t H_s dX_s \tag{8}$$

因此，我们需要研究这个积分是如何定义的，有怎么样的性质．我们先从一个一般的 Riemann 积分开始引入．

5.1 一般 Riemann 积分

考虑一个 $[0,1]$ 区间内的分割：

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

这个分割的方式是任意的，则其中的第 i 个分块大小 Δ_i 为：

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

对 τ_n 的一个拆分 σ_n 满足 $t_{i-1} \le y_i \le t_i, i = 1, 2, \cdots n$ 的任意取值 y_i 给出．对于给定的分割 τ_n 和 σ_n 定义 Riemann 和为

$$S_n = S_n(\tau_n, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta_i$$

由此可看出，Riemann 只是在对一个函数值进行加权平均．其中的权重就是相应区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 的区间长度 Δ_i．而同时当 f 只取非负值时候，S_n 是对函数 f 的图像与 t 轴之间的区域面积的近似．进一步使得区间的长度 (mesh) 趋向于 0，我们就可以以这样的方式进行分割．

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\Delta_i$$

当 $mesh(\tau_n) \to 0$ 时候存在，而且 S 与分割 τ_n 及其拆分 σ_n 的选择无关，则称 S 为 f 在 $[0,1]$ 区间上的寻常积分或黎曼积分，记为：

$$S = \int_0^1 f(t)dt$$

Note 5.1. *Riemann 积分可看作是任何积分的一个基础模型，一种新的积分应该与 Riemann 积分有多的相同属性．比如线性性；线性可加；Riemann 不定积分为积分上限函数．*

5.2 Riemann-Stieltjes 积分

在概率论中的随机变量 X 的数学期望为

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_X(t)$$

一个 R-S 积分的精确定义：类似于 Riemann 积分，考虑一个区间 $[0,1]$ 上的一个分割：

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

以及一个对 τ_n 的拆分：

$$\sigma_n : t_{i-1} \leq y_i \leq t_i, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

假设两个实值函数 $f(x)$ 和 $g(x)$：

$$\Delta_i g = g(t_i) - g(t_{i-1})$$

定义对应于 τ_n 和 σ_n 对 R-S 积分和为：

$$S_n = S_n(\tau_n, \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i g = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

R-S 和是以函数 g 在区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 的增量 $\Delta_i g$ 来作为权重．对函数值加权求和．以下给出一个精确的定义：

Definition 5.1. *设 $\alpha(t)$ 和 $f(t)$ 都是 $[a,b]$ 到 $\mathbb{R}$ 上的函数，对于 $[a,b]$ 的划分 Π 称*

$$S^{\Pi}(f;\alpha) := \Sigma_{t_j, t_{j-1} \in \Pi} f(\xi_{j-1}^{\Pi})(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}))$$

称为是 f 的 $Riemann - Stieltjes$ 和．

而我们就需要考虑：积分 $\int_0^1 f(t)dg(t)$ 在什么时候会存在，对应于在 $[0,1]$ 的布朗运动，取 $g = B$ 是否是可行的．对于第一个问题：函数 f 和 g 需要在同一个点 $t \in [0,1]$ 处不能都不连续．同时假设 f 连续，g 有界变差，即

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})| < +\infty$$

其中的上确界是根据区间上的所有可能分割做出的一个划分．

Definition 5.2. *假设 $\alpha(t)$ 和 $f(t)$ 是 [a,b] 到 $\mathbb{R}$ 到函数，称 f 是关于 αR-S 可积的，若当 $|\Pi| \to 0$ 时，$S^{\Pi}(f;\alpha)$ 收敛到不依赖于 ξ_j^{Π} 的有限值．这个值称为是 f 关于 α 的 R-S 积分．记为*

$$\int_a^b f(t)d\alpha(t) := \lim_{|\Pi|} \sum f(\xi_{j-1}^{\Pi})(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}))$$

Example 5.1. *设 f 为 [a,b] 上的连续函数，α 为单调函数，则 f 是关于 α 是 R-S 可积的．*

Definition 5.3 (有界变差函数)**.** *$\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ 为 [a,b] 的一个划分．假设 $V_\Pi := \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$．称 $V_f = \sup_{[a,b]\text{的所有划分}\Pi} V_\Pi f$ 为 f 的全变差．若 $Vf < \infty$ 则称 f 为有界变差函数．*

Example 5.2. $\int_s^t s dB_s = tB_t - 0 - \int_0^t B_s ds = tB_t - \int_0^t B_s ds$

关于布朗运动的积分 $\int_0^t B_s ds$ 实际上是依路径进行积分.（给定的 ω 是能够对其进行积分）因此求出来的是一个随机变量.
布朗运动 $\int_0^t B_s ds$ 的数学期望：$E\left[\int_0^t s dB_s\right] = E[tB_t] - E[\int_0^t B_s ds] = 0 - \int_0^t E[B_s]ds = 0$
对于 C_s：希望能够覆盖一大部分的随机函数．C_s 也是一个随机过程.
在随机过程中对于一个几乎处处的 ω，布朗运动的轨道 $B_t(\omega)$ 是一个几乎处处不可微的连续函数，因此它并不是一个有界变差函数.

$$\int_0^t f(t) dB_t(\omega)$$

R-S 积分在这里失效，也就是不能再 R-S 积分的意义下定义.

Lemma 5.1 (Levy 的振动性质)**.** *假设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为布朗运动，又*

$$s_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = s_2$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \Delta B_{t_k} = \Delta B_{t_{k+1}} - B_{t_k}, h = \max_{0\leq k\leq n-1} \Delta t_k$$

那么，

$$E\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k}^2 - (s_2 - s_1))\right|^2 \leq 2h(s_2 - s_1)$$

证明过程略.

将这个 levy 定理进一步推导至布朗运动：

Corollary 5.1 (布朗运动的有界变差)**.**

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2 \xrightarrow{L^2} (s_2 - s_1)$$

即

$$\lim_{h\to 0} E|\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta B_{t_k})^2 - (s_2 - s_1)|^2 = 0$$

Lemma 5.2. *概率为 1 的布朗运动的轨道在 t 的任何区间都不是有界变差的.*

Definition 5.4 (布朗运动关于自身的积分)**.**

$$I([a,b], D) := \sum_D B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

$[0,t]$ D 是一个划分

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

因为其中的 $\xi_i = t_{i-1}$，所以这个是一个左端点的 R-S 和．进一步可写成关于 $I_n = \sum_{i=1}^n (B_t^2) - \sum_{t=1}^n (B_{t_i} \cdot B_{t_{i-1}})$ 实际上就是等于

$$\sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = B_b^2 - B_a^2 - I([a,b], D)$$

通过一个 *Abel* 变换即可得到．对于一个二次变差：

$$var_2(B;[a,b],D) = \sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - I([a,b];D)$$
$$= B_b^2 - B_a^2 - 2I([a,b];D)$$

也就是当划分趋向于 0 时候，二次变差在 $\mathcal{L}^2$ 意义下趋于 $b-a$．我们有以下的引理．

Lemma 5.3.

$$\lim_n I([a,b];D_n) = \frac{1}{2}[B_b^2 - B_a^2 - (b-a)]$$

根据上述的左极限推导，不同于右极限推导，为

$$\frac{1}{2}[B_b^2 - B_a^2 + (b-a)]$$

也就是说，Brown 运动在 $\mathcal{L}^2$ 意义下极限存在．极限存在的关键是二次变差的极限存在．按照惯例，我们将取**左端点和**的极限写为积分的形式：

$$\int_a^b B(t)dB(t)$$

因此，Brown 运动的积分也是某种形式的 R-S 积分的某种意义下的极限．与通常的 R-S 积分有本质的差异．

6 Ito 积分

在之前我们探讨了关于 Brown 积分的形式，若我们能够去定义一个随机过程关于布朗运动的积分．这个是我们这一部分需要解决的问题．其一个基本形式为

$$\int_0^t X_t dB_t$$

该积分的形式就称为是一个 Ito 积分．

6.1 定义

接下来我们给出一个更为一般的形式．

Definition 6.1 (*Itô* 积分)**.** *假设 X_0 为 $\mathcal{F}_0-$ 可测，我们称*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s$$

为以 α 为漂移系数，β 为扩散系数的伊藤过程．其中 $\{\alpha_s, \beta_s, 0 \le s \le T\} \in \mathcal{L}_T^2$．
其中的 X_t 等于初值 + 黎曼积分 + 伊藤积分．微分形式：$dX_t = \alpha_t dt + \beta_t B_t$ 称为 General SDE.

Note 6.1. *微分形式也要在积分上理解. Ito 微分只是形式上的写法.*

一个 Ito 过程的函数是否仍然是 Ito 过程. 即 $\{X-t, 0 \le t \le T\}$, 进一步的推广得到黎曼积分项, $X_t = X_0 + \int_o^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta dB_s$. 其中的 $f(t, X_t)$ 的形式如何?

Corollary 6.1 (Ito 引理)**.** *假设 $\{X_t, t \in T\}$ 满足上式. $f(t,x)$ 具有连续偏导数, 则 $Y = \{Y_t, 0 \le t \le T\}$ 且*

$$\begin{aligned} Y_t = f(t, X_t) = f(0, X) + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) + \alpha_s \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) + \frac{\beta_s^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x}(s, X_s)\right] \\ = f(0, X) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x}(s, x_s) \end{aligned}$$

其中 $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = 0$ 和 $dB_t \cdot dB_t = dt$

Note 6.2. *Ito 公式的使用条件: 偏导数存在. 若没有达到这一要求, 其实际的形式会更为复杂.*

Note 6.3. *我们发现 $Y_t = f(t, X_t)$ 仍然也是一个 Ito 过程. 并且*

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$

Example 6.1. *$\{B_t, 0 \le t \le s\}$ 是否是一个 Ito 过程. 对于布朗运动 (均值为 0, 方差为 t) 来说其带入 Ito 过程的公式会得到*

$$B_t = 0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t s dB_s$$

$d|B_t|$ 并不可直接利用 Ito 公式. 因为 $f(t, 2) = |x|$ 的偏导数不连续. 若

$$X_t = B_t, X_0 = 0, X_s = 0, \beta = 1 \Rightarrow Y_t = f(t, B_0) = f(0, 0)$$

通过二元函数的泰勒展开: $f(t,x) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)t + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x$ 趋于正无穷大取极限之后,

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

其中的 s 是确定性的. $f^2 ds$ 是一个平方可积的适应过程. 数学期望可求得 $E[\int_0^t s dB_s] = 0$
方差 $Var(\int_0^t s dB_s) = E\left[(\int_0^t s dB_s)^2\right] = E[\int_0^t s^2 ds = \frac{t^2}{3}]$

6.2 简单过程的 Ito 随机积分

Definition 6.2. *一个随机过程 $C = (C_t, t \in [0, T])$ 满足一下条件:*

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$$

和一个适应于 $(\mathcal{F}_{t_{i-1}}, i = 1, 2, \cdots, n)$ 的随机变量序列 $(Z_i, i = 1, 2, \cdots, n)$, 即 Z_i 是布朗运动在时间 t_{i-1} 之前的函数.

$$C_t = \begin{cases} Z_n \\ Z_i \end{cases}$$

其中 $E[Z_i^2] < +\infty, \forall i = 1, 2, \cdots, \sigma(Z_i) \subset \mathcal{F}_{\rangle}$

Definition 6.3 (Ito 随机积分)**.** 一个 *Ito* 随机积分可由下式给出：

$$\int_0^T C_s dB_s := \sum_{i=1}^n C_{t_{i-1}}(B_t - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n Z_i \Delta_i B$$

假设 $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ 在区间 $[0,t]$ 上，简单过程 C 的 *Ito* 随机过程定义为为

$$\int_0^T C_s dB_s = \int_0^T C_s I_{[0,t]}(s) dB_s = \sum_{i=1}^n Z_{i-1}(B_{s_i} - B_{s_{i-1}})$$

对于 C_s 求布朗积分，需要满足的条件有：

- $\{I_t(C), 0 \leq t \leq T\}$
- $E[I_t(C)] = E[\int_0^t C_s dB_s] = 0$
- 伊藤等距：$E[I_t(C)] = E[() \int_0^t C_s dB_s)^2] = E\left[\int_0^t C_s^2 ds\right]$

证明. 当 $t = T$ 时

$$\begin{aligned} E\left[(\int_0^T C_s dB_s)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^n Z_{i=1}(B_{S_i} - B_{S_{i-1}})\right)^2\right] &= E[\sum_{i=1}^n Z_{i-1}^2 (B_{s_i} - B_{s_{i-1}})^2] + 2E\,[] \\ &= I_1 + 2I_2 \end{aligned}$$

其中 $I_1 = \sum_{i=1}^n E\left[Z_{i-1}^2 (B_{s_i} - B_{s_{i-1}})^2\right] = \sum_{i=1}^n$(全期望公式) $\square$

$$I_2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} E\left[Z_{i-1} Z_{j-1} (B_{s_i} - B_{s_{j-1}})\right]$$

仍然需要通过该公式去求解．得到这一结果．现在的问题在于如何选取条件期望的时间点．

6.2.1 简单过程的 Ito 随机积分性质

Properties 6.1 (Ito 随机积分为 0)**.** 容易看出 $EI_t(C) = 0$．在给出的定义中，Z_i 和 $\Delta_i B = 0$ 是独立，因此

$$E(Z_i \Delta_i B) = EZ_i E\Delta_i B = 0$$

6.3 Ito 引理

前面我们定义了随机积分，$H = (H_t)$ 称为是可积，若取左端点的 $R - S$ 和一个关于布朗运动积分的随机过程极限存在，极限可以是依概率收敛的．前面的结果给出的是一个关于可积的充分条件 Y_t 适应且 $\|Y_t - Y\|_2$ 趋于零．更明确的充分条件是

$$\mathbb{E}\int_0^t Y_s^2 ds < +\infty$$

微积分中有一个基本定理：微分和积分的统一起来，假设 f 可导，g 在 $[a,b]$ 上有界限变差，则

$$f(g(b))-f(g(a))=\int_a^b f'(g(t))dg(t)$$

随机积分是否有这样的性质．很遗憾，我们在之前的论述中，关于布朗运动关于自身的的随机积分

$$\int_0^t B_t dB_t=\frac{1}{2}(B_t^2-B_0^2-t)$$

与经典的基本定律多了一个后面的 t，是二次变差的部分．由此，我们进一步引出我们的 Ito 公式，用于解决 Ito 过程的积分求解．

假设 f 是一个二次可微的函数．关于 $B_t(\omega)$ 进行泰勒展开，记 $dB_t=B_{t+dt}-B_t$ 为 B 在 $[t,t+dt]$ 上的增量．

$$f(B_t+dB_t)-f(B_t)=f'(B_t)dB_t+\frac{1}{2}f''(B_t)(dB_t)^2+\cdots$$

其中的微分平方项 $(dB_t)^2$ 可被看成是一般 Riemann 积分中的 dt．对上式中进行取积分．可得并忽略关于 RHS 中的 3 次以上的积分，变有

$$\int_s^t df(B_x):=f(B_t)-f(B_s)=\int_s^t f'(B_x)dB_x+\frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx$$

上式中的第一项式关于 $f'(B)$ 的 Ito 随机积分．第二个积分应看成是关于 $f''(B)$ 的 Riemann 积分．其中定义了量 $f_s^t df(B_x)$．这个积分类似于级数中的伸缩和．因此可自然令其取值为 $f(B_t)-f(B_s)$．之后为方便记，令 $\int_s^v dV_x=V_t-V_s$

Definition 6.4. *假设 f 是二次可微连续，公式*

$$f(B_t)-f(B_s)=\int_s^t f'(B_x)dB_x+\frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx, s<t$$

是 Ito 引理的简单形式．

Example 6.2. *取 $f(t)=t^2$，则 $f'(t)=2t, f''(t)=2$，由 Ito 引理可得:*

$$B_t^2-B_s^2=2\int_s^t B_x dB_x+\int_s^t dx$$

若 $s=0$，则有

$$\int_0^t B_x dB_x=\frac{1}{2}(B_t^2-t)$$

Lemma 6.1. *令 $f(t,x)$ 是一个二阶偏导连续的函数:*

$$f(t,B_t)-f(s,B_s)=\int_s^t\left[f_1(x,B_x)+\frac{1}{2}f_{22}(x,B_x)\right]dx+\int_s^t f_2(x,B_x)dB_x,\quad s<t$$

一个更加一般的 Ito 引理，考虑一个形如

$$X_t=X_0+\int_0^t A_s^{(1)}ds+\int_0^t A_s^{(2)}dB_s \tag{9}$$

其中 $A_s^{(1)}$ 和 $A_s^{(2)}$ 都是适用于布朗运动．上述的积分中第一个为 Riemann 积分，而第二个是一个 Ito 意义下的随机积分．

Lemma 6.2. *假设 X 是一个形如(9) 的 Ito 过程，$f(t,x)$ 表示的是二阶偏导连续的函数，则有*

$$f(t,X_t)-f(s,X_s)=\\ \int_s^t\left[f_1(y,X_y)+A_y^{(1)}f_2(y,X_y)+\frac{1}{2}[A_y^{(2)}]^2f_{22}(y,X_y)\right]dy+\int_s^t A_y^{(2)}f_2(y,X_y)dB_y,\quad s<t$$

Lemma 6.3. *假设 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 是给出的两个 Ito 过程，$f(t,x_1,x_2)$ 是二阶偏导数连续的函数．则对 $s<t$，有*

$$\begin{aligned}&f(t,X_t^{(1)},X_t^{(2)})-f(s,X_s^{(1)},X_s^{(2)})\\&=\int_s^t f_1(y,X_y^{(1)},X_y^{(2)})dy+\sum_{i=2}^{3}\int_s^t f_i(y,X_y^{(1)},X_y^{(2)})dX_y^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=2}^{3}f_i(y,X_y^{(1)},X_y^{(2)})A_y^{(2,i)}A_y^{(2,j)}dy\end{aligned}$$

Example 6.3. *$X_t=t^2B_t^2$ ，将其写成 Ito 过程的形式，对其作 Ito 公式．取 $f(t,x)=t^2x^2$，则 $\frac{\partial f}{\partial t}=2tx^2,\frac{\partial f}{\partial x}=2t^2x,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2t^2$ 代入 Ito 公式，得到*

$$X_t=t^2B_t^2=\int_0^t\left[2sB_s^2+s^2\right]ds+\int_0^t 2s^2B_sdB_s$$

Example 6.4. *$X_i=e^{\sigma B_t}$，其中的 σ 为常数，取 $f(t,x)=e^{\sigma x}$ 其中 $\frac{\partial f}{\partial t}=0,\frac{\partial f}{\partial x}=\sigma e^{\sigma x},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\sigma^2e^{\sigma x}$ 则*

$$X_t=e^{\sigma B_t}=1+\int_0^t\sigma e^{\sigma B_s}ds+\int_0^s\sigma^2e^{\sigma B_s}dB_s$$

7 随机微分方程

取上述的例子6.4 我们可将其写为一个微分的形式，

$$dX_t=e^{\sigma B_t}=1+e^{\sigma B_s}ds+\sigma^2e^{\sigma B_s}dB_s$$

即

$$\begin{cases}dX_t=\dfrac{\sigma^2}{2}X_tdt+\sigma X_tdB_t\\ X_0=1\end{cases}$$

称为该方程为随机微分方程．

直观来说，随机微分方程就是常微分方程加上一个由 Brown 驱动的随机扰动．

$$dX_t=f(X)dt+g(X)dB_t$$

其中的 $B=(B_t)$ 是 Brown 运动，当 $g=0$ 时候就是一个常微分方程．但 f,g 对于 X 的依赖性的不同导致

了不同类型的随机微分方程．最为简单的是 Ito 随机微分方程．

Properties 7.1 (Lipschitz condition)**.** *若* $\alpha(t,x)$ *和* $\beta(t,x)$ *满足*

$$|\alpha(t,x)-\alpha(t,y)|+|\beta(t,x)-\beta(t,y)|\leq L(t,y)$$

对于 $\forall t\in[0,T]; x,y\in R, L>0$

$$|\alpha(t,x)|+|\beta(t,x)|\leq L(1+|x|)$$

则 SDE *在* $\mathcal{L}_T^2$ *下存在唯一解．*

在微分方程中，确保了初值问题存在唯一解的核心条件．

7.1 Ito 随机微分

首先考虑一个确定性微分方程：

$$dx(t)=a(t,x(t))dt,\quad x(0)=x_0 \tag{10}$$

要在这个方程之后引入随机项，最简单的方式是将初始化条件随机化．

$$dX_t=a(t,X_t)dt,\quad X_0(\omega)=Y(\omega)$$

称这样的方程为随机微分方程．

微分方程的随机性可通过一个附加的随机噪声的引入，也就是在方程(10) 中引入了一个 Ito 过程．

$$dX_t=a(t,X_t)dt+b(t,X_t)dB_t,\quad X_0(\omega)=y(\omega) \tag{11}$$

其中的 B 表示的是 BM．而其中的 a 和 b 都是确定性方程．若方程的解存在，则是一个随机过程．
对于上述的方程的一个解释是：随机过程 X 的变化量 $dX_t=X_{t+dt}-X_t$ 是由时间增量 dt 来实现的．其中的 dt 和 dB_t 的系数分别是 $a(t,X_t)$ 和 $b(t,X_t)$．但因为布朗运动没有可微轨道（几乎处处不可微）

Definition 7.1. *将上述的随机过程看作是*

$$X_t=X_0+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t b(s,X_s)dB_s,\quad 0\leq t\leq T \tag{12}$$

也就是进一步进行积分，得到了一个 Ito 积分．其中的 RHS 表示的是第一个 Riemann 积分，第二个是 Ito 随机积分．将上述方程称为是 Ito 随机微分方程．同时称布朗运动 B 为 Ito 随机微分方程的驱动方程．

同样也可用其他的驱动过程来代替布朗运动．这要求定义一个更为一般的随机积分．由此我们去利用强解的定义来得到这样的随机过程．

Definition 7.2. *Ito 随机微分方程的强解是一个随机过程* $X=(X_t,t\in[0,T])$ *它满足以下条件：*

- X *适应于布朗运动，在时间* t *下，*B_s *同时* $s\leq t$ *的函数．*
- *在方程 (12) 下的积分是有明确定义的 Riemann 积分或 Ito 积分*

- X 是一个关于给定布朗运动样本轨道的函数

一个强解是给定的布朗运动为基础的．若用另一个布朗运动来代替这个布朗运动，就会得到另一个强解，是一个由同一个函数表达式给出的．

Definition 7.3 (弱解)**.** 轨道行为并不是主要的．只对于 X 的分布感兴趣．对于给定初始条件 X_0 和系数函数 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$，必须只找到一个布朗运动使得 (12) 成立．

7.2 一般线性随机微分方程

Definition 7.4. 考虑一个

$$X_t = X_0 + \int_0^t [c_1 X_s + c_2(s)]ds + \int_0^t [\sigma_1(s) X_s + \sigma_2(s)]dB_s \tag{13}$$

系数函数 c_i 和 σ_i 是确定的连续函数．因此在 $[0,T]$ 上有界．我们可通过上述的强解定理可知有唯一强解．

Definition 7.5 (带加噪声的线性方程)**.**

$$X_t = X_0 + \int_0^t [c_1 X_s + c_2(s)]ds + \int_0^t \sigma_2(s)dB_s \tag{14}$$

可以将上述写成微分形式

$$dX_t = [c_1(t)X_t + c_2(t)]dt + \sigma_2(t)dB_t, t \in [0,T] \tag{15}$$

其中的过程 X 并没有直接包含在随机积分项中，也称其为线性方程．

Lemma 7.1. 乘积形式的微分方程：

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha_t dt + \beta_t dB_t \\ dY_t &= \gamma_t dt + \delta_t dB_t \end{aligned}$$

则

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

$$\begin{aligned} &dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t dt = 0 \\ &dB_t \cdot dB_t = dt \end{aligned}$$

求解的过程：我们利用上述的引理7.1 同时根据某些特征例子来猜测解的形式，首先假设解

$$X_t = [y(t)]^{-1} Y_t$$

其中

$$y(t) = exp\left\{ -\int_0^t c_1(s)ds \right\} \quad Y_t = f(t, X_t)$$

这里的 $f(t,x)$ 是一个连续函数．对 $X_t = Y_t^{-1}$ 作 Ito 公式得到：

$$dY_t = d(y(t)X_t) = c_2(t)y(t)dt + \sigma_2(t)y(t)dB_t$$

两边积分同时注意到 $y(0) = 1$ 和 $X_0 = Y_0$ 可得到：(14) 的解为

$$X_t = [y(t)]^{-1}\left(X_0 + \int_0^t c_2(s)y(s)ds + \int_0^t \sigma_2(s)y(s)dB_s\right)$$

若 X_0 是一个常数，这是一个高斯过程，同时该形式与方程 (16) 相同．

7.2.1 带有噪声的齐次方程

考虑一个微分方程：

$$X_t = X_0 + \int_0^t c_1(s)X_s ds + \int_0^t \sigma_1(s)X_s dB_s \tag{16}$$

其微分形式

$$dX_t = c_1(t)X_t dt + \sigma_1(t)X_t dB_t$$

因 X_t 的表现为布朗运动增量的系数，因此称其为带有噪声的随机微分方程．齐次的考虑就是将两侧同时除以 X_0，并假设 $X_0 = 1$．我们可以猜想有一个指数形式的解，假设所有的 $t, X_t > 0$
可假设 $Y_t = \ln X_t$ 其中 $f(t,x) = \ln x, f_1(t,x) = 0, f_2(t,x) = x^{-1}.f_{22}(t,x) = -x^{-2}$
应用 Ito 公式可得到：

$$dY_t = [c_1(t) - 0.5\sigma_1^2(t)]dt + \sigma_1(t)dB_t$$

对两侧积分可得

$$X_t = X_0 exp\left\{\int_0^t [c_1(s) - 0.5\sigma_1^2(s)]ds + \int_0^t \sigma_1(s)dB_s\right\}, t \in [0,T] \tag{17}$$

Example 7.1. *几何布朗运动：$X_t = e^{\mu t + \sigma B_t} = X_0 exp\{\mu_t + \sigma B_t\} = X_0 exp\{\int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma ds\}$ 我们会发现其形式与方程 (17) 相似．因此我们可称方程17 其为广义几何布朗运动．进一步写成 Ito 过程的形式：*

7.2.2 一般情形

求解一般的线性随机微分方程，将其嵌入到一个由两个随机微分方程构成的系统中．之前的齐次随机微分方程在 $Y_0 = 1$ 时候的解 Y．由公式得到

$$X_t^{(1)} = Y_t^{-1}\ X_t^{(2)} = X_t$$

应用 Ito 引理计算得到：

$$dX_t^{(1)} = [-c_1(t) + \sigma_1^2(t)]X_t^{(1)}dt - \sigma_1(t)X_t^{(1)}dB_t$$

根据分布计算公式可得到确定性微分方程的解：

$$dx(t) = [c_1(t)x(t) + c_2(t)]dt, \quad t \in [0, T]$$

根据方程 (**??**) 可得到其中的 $d(X^{(t)}, X_t) = X_t \cdot dX_t^{(1)} + X_t^{(1)} dX_t + dX_t^{(1)} \cdot dt$

$$X_t = Y_t(X_0 + \int_0^t [c_2(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)]Y^{-1}ds) + \int_0^t \sigma_2 Y_s^{-1} dB_s$$

Example 7.2 (Vasicek 利率模型)**.** 这是一个用于表示借贷放贷利率的标准模型，利率非常数，而是一个关于时间 t 随机函数. 因为 r 可能会在每一个时间发生变化.

$$r_t = r_0 + c\int_0^t [\mu - r_s]ds + \sigma \int_0^t dB_s$$

或 $dr_t = c(\mu - r_t)dt + \sigma dB_t$

$$c_1(t) = -c, c_2(t) = \mu, \sigma_1(t) = 0, \sigma_2(t) = \sigma$$

$\lim_{t\to\infty} E[r_t] = \mu$

Note 7.1. *Ito* 积分的数学期望等于 *0*，在之前已经得到推导.

7.3 解的期望和方差函数

若我们有一个随机微分方程的精确解，我们试图求解方程(15) 的期望，一种方法是根据 Ito 等距来求解. 另一个可直接利用(15) 来求解，以积分的形式来求.

$$X_t = X_0 + \int_0^t (c_1(s)X_s + c_2(s))ds + \int_0^t (\sigma_1(s)X + \sigma_2)dB_s \tag{18}$$

在等式两侧求期望，得到

$$E[X_t] = X_0 + E(\int_0^t (c_1(s)X_s + c_2(s))ds) = X_0 + \int_0^t (c_1(s)E[X_s] + c_2(s))ds \tag{19}$$

令 $f(t) = E[X_s]$. 于是得到

$$f'(t) = c_1(t)f(t) + c_2(t), f(0) = X_0 \tag{20}$$

该方程是线性常微分方程.

$$Var(X_t) = E[X_t^2] - E[X_t]^2 \tag{21}$$

对 X_t^2 作 Ito 公式，$f(t,x) = x^2, \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

$$dX_t^2 = \left[2X_t + (c_1(t)X_t + c_2(t)) + (\sigma_1(t)X_t + \sigma_2(t)^2)\right] \tag{22}$$

求积分，做数学期望得:

$$E[X_t^2] = X_0^2 + \int_0^t \left[(2c_1(s) + \sigma_1^2(s)E[X_s^2] + (2\sigma_1(s) + \sigma_2(s)))\right] \tag{23}$$

令 $g(t)=E[X_t^2]$ 得

$$g'(t)=(2c_1(t)+\sigma_1^2(t))g(t)+[2c_2(t)+2\sigma_1(t)\sigma_2(t)]\,,g(0)=x^2 \tag{24}$$

Example 7.3. 求解下列的一般随机积分，同时进一步求解其期望和方差.

$$\begin{cases}dX_t=[3X_t+2]dt+(X_t-1)dB_t\\X_0=1\end{cases}$$

其中 $C_1(t)=3,C_2(t)=2,\sigma_1(t)=1,\sigma_2(t)=-1$ 对于 $dY_t=3Y_tdt+Y_tdB_t,\quad Y_0=1$ 的微分方程. 其中

$$Y_t=exp\{\int_0^t(3-\frac{1}{2})dt+\int_0^t 1dB_t\}=e^{\frac{5}{2}t+B_t}$$

进一步求解

$$X_t=Y_t(X_0+\int_0^t(C_2(s)-\sigma_1(s)\sigma_2(s))Y_s^{-1}ds+\int_0^t\sigma_2(s)Y_s^{-1}dB_s)$$

解得

$$X_t=e^{\frac{5}{2}t+B_t}(1+\int_0^t 3e^{-\frac{5}{2}s-B_s}ds-\int_0^t e^{-\frac{5}{2}s-B_s}dB_s)$$

求解期望：我们对于原式进行积分可得到

$$dX_t=1+\int_0^t(3E[X_s]+2)ds+\int_0^t(E[X_s]-1)dB_s$$

而 *Ito* 积分为 *0*，最终我们可得到：

$$E[X_t]=1+\int_0^t(3E[X_s]+2)ds \tag{25}$$

令 $E[X_t]=f(t)$，根据(25) 我们可得到

$$f'(t)=3f(t)+2,f(0)=1$$

根据上式可解得：

$$E[X_t]=f(t)=\frac{5}{3}e^{3t}-\frac{2}{3}$$

Example 7.4. 求解下列的一般随机积分，同时进一步求解其期望和方差.

$$dX_t=2X_tdt+(3X_t-1)dB_t,X_0=1$$

8 B-S 公式

8.1 自融资策略

假设 t 时刻的股票价格为 S_t

$$dS_t=\mu S_tdt+\sigma S_tdt,S_0=s_0$$

由此解出

$$
\begin{aligned}
S_t = S_0 exp\{(\mu - 0.5\sigma^2)t + \sigma B_t\} \\
E[S_t] = s_0 e^{\mu t} \\
dE[S_t] = \mu E[S_t]dt
\end{aligned}
$$

假设债券价格为 $\widetilde{S}_t$，对应份额的变化为 $\widetilde{\Delta_t}$

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{S}_t = r\widetilde{S}_t dt \\
\widetilde{S_0} = 1 \\
\widetilde{S}_t = e^{rt}
\end{aligned}
$$

其中的 r 为无风险利率.
一个投资组合的价值过程可表示为

$$X_t = \Delta_t S_t + \widetilde{\Delta}_t \widetilde{S}_t$$

假设投资组合是自融资的 (self-financing) 以数学形式表示:

$$dX_t = \Delta_t dS_t + \widetilde{\Delta}_t d\widetilde{S}_t \tag{26}$$

Δ 表示的是资产份额的变动.

Definition 8.1. *期权复制：在一个完美市场中，任意一个衍生品都可以由投资组合来复制. 价值过程在 t 时刻为 $X_t = (S_T - K)^+$*

8.2 B-S 公式定义

先对于一个投资组合在 t 时期的价格进行一个定义相关的函数:

$$X_t = C(t_0, S) \tag{27}$$

根据上述的推导，我们试图去确定期权价格 $f_0 = X_0 = f(0, S_0)$ 转换为求函数 C 的形式.
令 X_t 为一个风险资产在 t 时刻的价格，假设它是一个几何布朗运动驱动的. 有如下的形式:

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 e^{(c-0.5\sigma^2)t + \sigma B_t}, 0 < t \leq T \tag{28}$$

其中的 $B = (B_t, t \leq 0)$ 是布朗运动. X_0 与 B 相互独立

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds$$

这个方程可等价的改写为:

$$dX_t = \Delta dS_t + \widetilde{\Delta} d\widetilde{S}_t$$

对进行(28) 进行 Ito 公式，可得到

$$dX_t = d(t, X_t) = \left[C_t(t, S_t) + C_x(t, S_t)\mu S_t + \frac{1}{2}C_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2\right]dt + C_x(t, S_t)\sigma S_t dB_t \tag{*}$$

而对于(27) 进一步简化得到:

$$dX_t = \mu\Delta_t S_t dt + \sigma\Delta_t S_t dB_t + \widetilde{\Delta}_t r\widetilde{S}_t dt = [rX_t + (\mu - r)\Delta_t S_t]\,dt + \sigma\Delta_s S_t dB_t \tag{**}$$

将(*)(**) 这两个式子进行比较，我们会发现两个不同方程所得到的微分形式，所对应的 Ito 过程需要对应．因此

$$\Delta_t = C_x(t, S_t) \tag{29}$$

$$C_t(t, S_t) + C_x(t, S_t)\mu S_t + \frac{1}{2}C_{xx}^2(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 = rX_t + (\mu - r)C(t, S_t)S_t \tag{30}$$

(29) 和(27) 可带入(30) 可得到

$$C_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 C_{xx}(t, S_t) = rC(t, S_t) - rS_t C_x(t, S_t) \tag{31}$$

该方程对于 $\forall 0 \le t \le T, \forall\omega \in \Omega$ 均成立，而我们的 S_t 是一个布朗运动，取值为 $S_t > 0$．也就是等价于

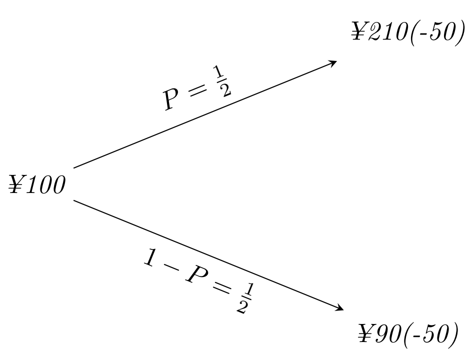
$$C_t(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_{xx}(t, x) = rC(t, x) - rxC_x(t, x) \tag{32}$$

对于 $\forall 0 \le t \le T, \forall x > 0$ 均成立．该方程就是一个 PDE，也称为 BSM 方程．而我们的原有的问题就转为求解方程组

$$\begin{cases} C_t(t, x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_{xx}(t, x) = rC(t, x) - rxC_x(t, x) \\ C(T, x) = (x - k)^+ \end{cases}$$

该方程组就是在(32) 和原初条件的组合得到．

Example 8.1. *为何不直接使用* $E(e^{-rT}(X_T - K)^+)$ *作为期权价格．一个二叉树模型：一支股票* $S_0 = 100$.



在第一天到第二天敲定的价格 $K = 50$ *看涨期权，到期日为明天．第二天的收益* $X_2 = \frac{1}{2}(210 - 50) + \frac{1}{2}(90 - 50) = 100$ *但若其选择在今天选择卖空期权得到 ¥100，进一步使用 ¥100 购买股票（无成本），第二天需要向你执行期权，需向你支付 50 元期权费购买股票，你最终获利 50 元．*

上述的例子出现在于市场的估计是错误的．

若用简单直观的方法来解释这个方程，其含义是：在区间 $[t, t+dt]$ 上有

$$X_{t+dt} - X_t = cX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

等价地，有

$$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t} = cdt + \sigma dB_t$$

上式中左手边表示的是相对收益率．表明的是相对回报的走势就是一个线性的趋势 cdt．并且受到一个随机噪声 σdB_t 的影响．因此其中的常数 c 就是平均收益率．$\sigma > 0$ 就是波动率．从公式可看出，若 σ 越大，X_t 的波动也越大．一个特别的是 $\sigma = 0$ 表示的是波动率为 0．则上述的过程就是一个确定性的过程．解为 $X_t = X_0 e^{ct}$．若 $\sigma > 0$，则希望能够得到一个带有随机扰动的项．而若有一个无风险资产，在 t 时刻可以得到的收益是

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}$$

此时的本金 β_0 将依据固定利率 $r > 0$ 不断的增加．注意到 β 所需要满足的条件：

$$\beta_t = \beta_0 + r\int_o^t \beta_s ds$$

因此若将风险资产与无风险资产进行组合，我们可得到：

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t$$

这里假设 a_t 和 b_t 可以取任意的正数或负数．a_t 取负值意味着股票卖空．因此此时你的交易策略为：

$$dV_t = d(a_t X_t + b_t \beta_t) = a_t dX_t + b_t d\beta_t$$

或者可写成 Ito 积分的形式：

$$V_t - V_0 = \int_0^t d(a_s X_s + b_s \beta_s) = \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t b_s d\beta_s$$

欧式期权看跌的预期收益为

$$(K - X_T)^+ = \begin{cases} K - X_T, & X_T < K \\ 0, & X_T \geq K \end{cases}$$

Definition 8.2. 我们考虑一个自融资 (a_t, b_t) 相应的资产价值过程 V_t 为

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t = u(T-t, X_t), \quad t \in [0, T] \tag{33}$$

其中的 $u(t,x)$ 是光滑的确定性函数．因投资组合在满期 T 的价值 V_T 可能是 $(X_T - K)^+$，因此满期

$$V_T = u(0, X_T) = (X_T - K)^+$$

自融资策略往往被称为是对未定权益 $(X_T - K)^+$ 的套期保值．

$$f_1(t,x) = -u_1(T-t,x), f_2(t,x) = u_2(T-t,x), f_{22}(t,x) = u_{22}(T-t,x)$$

又因为 X 满足 Ito 过程

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

再次应用 Ito 引理

$$\begin{aligned}
V_t - V_0 &= f(t,X_t) - f(0,X_0) \\
&= \int_0^t [f_1(s,X_s) + cX_s f_2(s,X_s) + 0.5\sigma^2 X_s^2 f_{22}(s,X_s)]ds + \int_0^t [\sigma X_s f_2(s,X_s)]dB_s \\
&= \int_0^t [-u_t(T-s,X_s) + cX_s u_2(T-s,X_s) + 0.5\sigma^2 X_s^2 u_{22}(T-s,X_s)]ds + \int_0^t [\sigma X_s u_2(T-s,X_s)]dB_s
\end{aligned}$$

另一方面，因为 (a_t, b_t) 是自融资的，有

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t b_s d\beta_s$$

由 $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$ 可得到

$$d\beta_t = r\beta_0 e^{rt} dt = r\beta_t dt$$

进一步因为 $V_t = a_t X_t + b_t \beta_t$，所以有

$$b_t = \frac{V_t - a_t X_t}{\beta_t}$$

由于 X_t，可以任意取正值，上面最后一个等式

PDE 有显示解. 带有边界条件的偏微分方程已经被研究透彻.

$$u(t,x) = x\Phi(g(t,x)) - Ke^{rt}\Phi(h(t,x))$$

其中

$$g(t,x) = \frac{\ln(x/K) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma t^{1/2}}$$
$$h(t,x) = g(t,x) - \sigma t^{1/2}$$

对于执行价格为 K 的欧式期权来说

$$V_0 = u(T, X_0) = ()$$

因此原问题最终转换为的求解.

8.3 测度变换——一个有用的技巧

Theorem 8.1. *若概率* $\forall A \in \mathcal{F}$，*若满足* $P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$，*则称* Q *关于* P *绝对连续. 记* $Q << P$. *若* $Q << P$，*且* $P << Q$，*则* Q *与* P *等价.*

也就是在两个测度下的概率为零是等价的．同样若概率为 1 也是等价的．

Definition 8.3. 令 B 为标准布朗运动，且 $\mathcal{F} = \sigma(B_s, s \leq t)$，定义 $\widetilde{B}_t = B_t + at$，当 $a \neq 0$ 时候，$\widetilde{B}_t$ 不是布朗运动．可选择合适的 Q 使得其成为一个布朗运动．

Theorem 8.2. $\{B_t\}$ 是标准布朗运动．$\{F_t\}$ 是由 B 生成的．则在 P 下，$M_t = exp\{-\frac{1}{2}a^2t + a\beta_t\}$ 为鞅．

8.3.1 期权定价

市场并不会根据市场参与群体的风险厌恶程度而改变自身的定价策略．因此我们就考虑一个风险中性的平均收益率即可．也就是不用去关心这个收益率的更多数学特征．由此市场就只有一个收益率．市场满足

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \\ dS_r = r\widetilde{S}_t dt \end{cases}$$

可改写为

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t (dB_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt) = rS_t dt + \sigma S_t d(B_t + \frac{\mu - r}{\sigma})$$

该等式在 P 下并不是 BM．令 $a = \frac{\mu - r}{\sigma}$，由定理得到在 Q 下的平均收益率，即为

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{B_t}$$

而债券的价格 $d\widetilde{S}_t = r\widetilde{S}_t dt$ 保持不变．其中的 $a = \frac{\mu - r}{\sigma}$ 称为风险的市场价格．

Properties 8.1 (折现后的股票价格)**.** 折现后的股票价格为 $e^{-r}S_t$

$$d(e^{-r}S_t) = S_t e^{-rt} + e^{-rt}S_t + de^{-rt}dS_t = \sigma e^{-rt}S_t dB_t$$

最后就是一个鞅．

折现后的价值过程：$d(e^{-rt}X_t)$

$$\begin{aligned} d(e^{-r}X_t) &= e^{-rt}dX_t + X_t e^{-rt} + de^{-rt}dX_t \\ &= e^{-rt}\Delta_t dS_t + e^{-rt}N(t)d\widetilde{S}_t - re^{-rt}X_t dt \\ &= \sigma\Delta_t(e^{-rt}S_t d\widetilde{B}_t) \end{aligned}$$

也就是在 Ito 下的积分，折现后的价值过程在 Q 下是鞅．

未定权益 $(S_t - k)^+$，折现后的 $e^{-rT}(S_T - K)^+$ 期权复制：

$$X_T = (S_T - k)^+, X_t = C(t, S_t)$$

Properties 8.2. $\{e^{-Tt}X_T\}$ 是鞅，也即是在 Q 下取．

$$E_Q[e^{-rT}X_T|\mathcal{F}_t] = e^{-rt}X_t$$

表示在 Q 下的条件期望．

由此可对价值过程进行估计:

$$X_t = c(t, S_t) = E_Q[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t]$$

令 $t = 0$

$$X_t = c(0, S_t) = E_Q[e^{-r(T)}(S_T - K)^+]$$

Note 8.1. Q: 等价鞅测度，也称为风险中性概率

当 $p \neq 0$ 时，

$$c(t, S_t) =$$